***Лекция 8***

**Потенциальное силовое поле.**

**Определение и свойства потенциального силового поля.**

***Силовым полем*** называется трехмерное пространство, в каждой точке которого задана функция силы

Если время t отсутствует явно, то поле ***стационарное***.

Рассмотрим стационарное силовое поле, заданное аналитически декартовыми проекциями:

Как было показано, для вычисления конечной работы силы силового поля, необходимо знать траекторию точки. Среди силовых полей существует класс ***потенциальных силовых полей***, для которых конечная работа силы определяется только начальным и конечным положением точки и не зависит от траектории.

Силовое поле (2) называется ***потенциальным***, если существует такая функция ***потенциальной энергии*** , что

Пусть задано поле (2). Как проверить, является ли оно потенциальным? Мы считаем, что потенциальная энергия П является непрерывной, дважды дифференцируемой функцией координат. Тогда можно воспользоваться ее свойством: порядок взятия смешанной производной не влияет на результат :

Отсюда ***критерии потенциальности cилового поля***

***Свойства работы потенциальных сил.***

1. Элементарная работа потенциальной силы равна минус дифференциалу потенциальной энергии. Действительно:

Отсюда вытекают следующие свойства.

1. Конечная работа потенциальной силы зависит только от начального и конечного положения точки
2. Работа по замкнутому кругу равна нулю:

, поэтому

**Эквипотенциальные поверхности**

**Примеры вычисление потенциальной энергии.**

**Закон сохранения полной механической энергии.**

Поверхность на которой П сохраняет значение называется ***эквипотенциальной***:

Выясним направление потенциальной силы **F** по отношению к эквипотенциальной поверхности. При перемещении точки по эквипотенциальной поверхности сила **F** не совершает работы:

**dr**

**F**

П=0

M(x,y,z)

Mo

Рис.1

Поскольку перемещение d**r** направлено произвольно в касательной плоскости к поверхности П = С1, то

потенциальная сила

***перпендикулярна*** эквипотенциальной поверхности.

С другой стороны

Значит,

потенциальная сила направлена ***в сторону убывания*** потенциальной энергии П.

По определению потенциального силового поля две функции

П(х,у,z) и П(х,у,z) + С,

где С- произвольная постоянная, определяют одно и тоже силовое поле**.** Говорят, что

потенциальная энергия определена с ***точностью до аддитивной постоянной****.*

Это значит, что мы можем положить равенство потенциальной энергии нулю на любой, выбранной нами, эквипотенциальной поверхности (Рис.1), и назвать эту поверхность ***нулевым уровнем потенциальной энергии.***

Выберем нулевой уровень потенциальной энергии. Переместим точку из произвольного положения М(х,у,z) пространства в любую точку нулевого уровня и сосчитаем работу силы:

Отсюда ***правило вычисления функций потенциальной энергии***:

*Функция П(х,у,z) вычисляется как работа потенциальной силы*

*на перемещение из произвольной точки М(х,у,z) на нулевой уровень****.***

**Примеры** (см Л 5)**:**

1. ***Постоянная сила*** :

Элементарная работа

Потенциальная энергия

Конечная работа

Приходим к известной формуле

**r1**

**r2**

**Δr**

**F**

x

y

z

h

Рис.2

Эквипотенциальными являются плоскости, перпендикулярные **F**

1. ***Cила тяжести***.

Это частный пример постоянной силы, где :

Поле однородно, если

Направим ось вертикально вверх, тогда

Элементарная работа

Потенциальная энергия

Все плоскости z = const эквипотенциальны. Поэтому, как и раньше получаем

Работа положительна, если точка опускается.

1. ***Прямая линейная пружина***:

Известно (Л 5), что проекция восстанавливающей силы равна

с

**Fв**

m**g**

*l0*

x

y

x

0

Рис.3

Элементарная работа

Потенциальная энергия

Конечная работа

Заменяя квадраты координат равными им деформациями, получаем знакомую формулу:

1. ***Спиральная линейная пружина***:

Момент упругих сил

с’

φ = Δ’

Δ’= 0

Рис.4

Элементарная работа

Потенциальная энергия

Конечная работа

***Закон сохранения полной механической энергии***

Система называется ***консервативной***, если все действующие на неё силы потенциальны.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии для консервативной системы в интегральной форме:

или

***Полной механической энергией*** системы называется сумма её кинетической и потенциальной энергий:

Как видим, полная механическая энергия консервативной системы сохраняется (консервируется)

E = const (18)

Именно поэтому такая система называется *консервативной*.

Предположим, что кроме потенциальных сил, на систему действуют не потенциальные силы, тогда:

Поделив на dt, найдем, что

***скорость изменения полной механической энергии равна мощности непотенциальных сил****.*

(19)

Например, при наличии ***силы вязкого сопротивления***, модуль которой пропорционален первой степени скорости

полная механическая энергия убывает со скоростью

**Обобщенные силы консервативной системы.**

**Статический принцип возможных скоростей консервативной системы**:

Рассмотрим консервативную несвободную систему с потенциальной энергией П (x,y,z), и обобщенными координатами q1....q*l*. Найдем обобщенные силы системы по определению

или

**Пример**: эллиптический маятник

Примем за нулевой уровень потенциальной энергии положение и вычислим работу при возвращении системы в начало координат

П не зависит от х, значит

**Статический принцип возможных скоростей консервативной системы**:

В положении равновесия все обобщенные силы обращаются в ноль.

Это значит, что

***в положении равновесия потенциальная энергия консервативной системы имеет экстремум***

Следовательно, нахождение положений равновесия консервативной системы сводится к нахождению экстремумов функции П.

**Уравнение Лагранжа для консервативной системы.**

**Циклические координаты и интегралы.**

Рассмотрим консервативную несвободную систему с *l* степенями свободы. Потенциальная энергия определяет обобщенные силы

Уравнения Лагранжа приобретают вид

Здесь учтено, что потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей

Запишем уравнения Лагранжа

через ***функцию Лагранжа***

Координата называется ***циклической***, если функция Лагранжа от нее не зависит

Уравнение Лагранжа с номером σ приобретает вид

и имеет ***циклический интеграл***

Часто этот интеграл выражает случай сохранения количества движения или кинетического момента.

**Пример**: эллиптический маятник

П и Т не зависят от *х*, значит *х*- циклическая координата, и существует интеграл

Мы уже отмечали, что этот интеграл выражает ожидаемое сохранение количества движения системы вдоль оси х.

Программа

<http://www.wolframalpha.com/input/?i=Lagrangian+%28q%27%29%5E5+-+q%5E3>

выводит дифференциальное уравнение движения системы с 1ой степенью свободы по

заданной функции Лагранжа L.