***Лекция 11***

**Вынужденные колебания без сопротивления.**

Как мы выяснили, консервативная система без сопротивления сохраняет полную энергию и совершает незатухающие колебания. Если учесть влияние среды (вязкое сопротивления), то колебания либо отсутствуют, либо затухают, а полная энергия системы убывает, переходя в среду.

Энергия может также поступать в систему из среды. Пусть действие среды на систему выражается периодической обобщенной силой. Как известно, любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье:

Здесь амплитуда *i*-oй гармоники, – вынуждающая частота этой гармоники, – начальная фаза этой гармоники.

Уравнение Лагранжа такой системы:

Подставив квадратичные формы Т и П

получим неоднородное дифференциальное уравнение

Его решение складывается из общего решения однородного уравнения и частного решения.

Частное решение будет иметь вид правой част, т.е представлять из себя сумму одинаковых по виду решений (гармоник). Рассмотрим обобщенную силу в виде одной из гармоник

Получим ***дифференциальное уравнение вынужденных колебаний без сопротивления***

где, как и прежде:

Решение

складывается из общего решения однородного уравнения

и частного решения, которое будем искать в виде правой части

Здесь А – амплитуда частного решения. Найдем А и ε.

Подставив (9, 10) в уравнение (6), после сокращения на Sin, получаем

Таким образом, частное решение имеет вид

Теперь полное решение при имеет вид

Постоянные С1, С2 найдем из начальных условий:

Откуда

Подставив и в решение, найдем закон движения

Видим, что движение системы состоит из трех колебаний. Первым стоит колебание с собственной частотой k и амплитудой, зависящей от начальных условий , . Второе колебание с собственной частотой k и амплитудой, не зависящей от начальных условий. Третье, собственно-вынужденное колебание с частотой вынуждающей силы *p* и амплитудой, не зависящей от начальных условий.

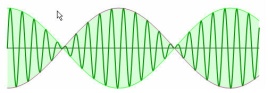
**Биения и резонанс при отсутствии сопротивления.**

Как возникает вынуждающая сила? Ее можно создать, поставив электромотор с неуравновешенной массой на упругую балку (Рис.1). Вынуждающей частотой p является угловая скорость ω вращения электромотора. При мотор колеблется на балке с собственной частотой k. Если включить мотор, то при амплитуда А (11) возрастает, стремясь к бесконечности.

Рис.1

ω = p

Выясним, как ведет себя система при . Для простоты положим начальные условия нулевыми. Тогда и решение приобретет вид:

Видим, что при p → k амплитуда вынужденных колебаний становится периодической функцией малой частоты Такое движение называется ***биениями***. Биения можно слышать в моторном самолете, когда частота вращения мотора приближается к собственной частоте какой-то детали фюзеляжа. Представление о биениях частоты звука дает анимация



***Резонанс***

Найденное ранее частное решение теряет смысл при , поскольку его амплитуда

стремится к бесконечности. Явление увеличения амплитуды вынужденных колебаний А при определенных значениях вынуждающей частоты р называется ***резонансом.***

Пусть при включении мотора (Рис.1) частота его вращения совпала с собственной частотой колебаний отключенного мотора на балке.

Выясним, как будет изменяться амплитуда частного решения во времени. Попробуем найти частное решение в виде

Подставив эти выражения в дифференциальное уравнение, с учетом получим

и частное решение

Итак, амплитуда вынужденных колебаний (и деформация балки) будет линейно возрастать во времени. При достижении деформаций предельных значений, балка сломается.

Построим зависимость амплитуды А собственно вынужденных колебаний от вынуждающей частоты p. Для построения качественных зависимостей принято переходить к безразмерным величинам. Вместо амплитуды А рассмотрим ее отношение к «статическому отклонению»

z = 1

z

=1

Рис. 2

Это отношение безразмерно и называется ***коэффициентом динамичности.***

Здесь

– безразмерная вынуждающая частота, называемая ***коэффициентом настройки*** (вынуждающей частоты на собственную частоту).

При , при . График приобретает вид Рис.2.

Чтобы избежать опасности разрушения системы, следует избегать работы вблизи резонанса

.

**Зависимость сдвига фазы ε (z)**

Сдвигом фазы ε называют разность между фазой вынуждающей силы и фазой частного решения. Найдем ε при различных значениях z.

Частное решение Сдвиг фаз

При : ε = 0

При : ε =

При : ε =

Изобразим график зависимости ε (z) (Рис.3).

Сдвиг фаз можно наблюдать, раскачивая «раскидай»- мячик на резинке. Если частота движений руки меньше собственной частоты колебаний раскидая, то шарик движется в одной фазе (синфазно) с рукой (Рис 4, а). При большой частоте движений руки шарик движется «в противофазе» с рукой (Рис 4, б).

ε

z

1

0

Рис. 3

Рис.4

а

б