***Лекция 7***

**Уравнения Лагранжа**

**Обобщенные координаты.**

**Число степеней свободы системы.**

Рассмотрим систему точек {с идеальными голономными нестационарными связями. Положение системы в инерциальной системе отсчета определяется координатами (*x1, y1, z1; x2, y2, z2;… ;xn, yn, zn*). Эти 3n координат подчиняются s уравнениям голономных связей:

*Фj (x1…zn; t)* ≥ 0 (1)

Таким образом, из 3n координат только *l* = 3n-s являются независимыми.

Число *l* называется ***числом степеней свободы*** голономной системы. Оно может быть определено как число координат, которое надо зафиксировать, чтобы система остановилась.

Декартовы координаты не всегда удобны. Кроме них, используют угловые координаты и их комбинации с линейными координатами. ***Обобщенными координатами qi*** называются параметры любой размерности, определяющие положение системы.

1

2

3

Рис.1

Например, обобщенными координатами системы трех тел на рисунке являются: координата центра и угол поворота катка 1, угол поворота блока 2, координата тела 3.

Если каток движется без проскальзывания, нить нерастяжима и не скользит по блоку 2, то система имеет 1у степень свободы, поскольку достаточно зафиксировать одну из перечисленных координат, чтобы система остановилась.

Если каток проскальзывает, либо нить скользит по блоку 2, то *l* =2. А при отсутствии всех перечисленных ограничений все 4 обобщенные координаты становятся независимыми, и система имеет 4 степени свободы.

Условимся в дальнейшем под обобщенными координатами понимать только независимые координаты

**Обобщенные силы.**

**Способы их вычисления.**

Рассмотрим систему точек {в произвольном возможном положении. Обозначим равнодействующие активных сил и реакций связей, действующих на точки, через . Все возможные законы движения из данного положения являются функциями независимых обобщенных координат и времени

В данном положении возможная скорость точки

складывается из переносной скорости , однозначно определенной движением связей,

и одной из множества виртуальных скоростей :

Множество виртуальных скоростей (6)строится на векторах  
  
направленных по касательным к координатным линиям . Различие состоит в произвольных значениях обобщенных скоростей .

Дадим точкам системы произвольные виртуальные скорости и вычислим виртуальную мощность всех сил. Реакции идеальны (, поэтому

В этом выражении мощности скобки умножены на обобщенные скорости . Поэтому выражения в скобках:

естественно назвать обобщенными силами

Обобщенные силы редко находят по формуле (9). Чаще всего обобщенные силы находят как коэффициенты при в выражении виртуальной мощности активных сил

Для потенциальных сил (см. ниже) обобщенные силы вычисляются по функции потенциальной энергии П так:

***Пример***

Найдем обобщенные силы ***эллиптического маятника.***  Маятник состоит из тела массы m1, поступательно скользящего без трения вдоль оси х, и шарнирно прикрепленного к нему математического маятника длины *l* и массы m2. Система имеет 2 степени свободы и 2 независимые обобщенные координаты х и φ.

x

φ

m1g

*l*

Связи стационарны, значит, виртуальные скорости являются возможными скоростями.

При вычислении возможной мощности активных сил *m****1g***

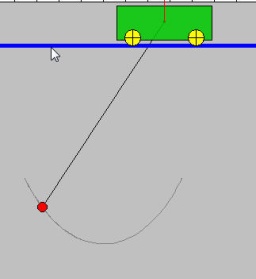
и *m****2g***  воспользуемся независимостью и произвольностью возможных скоростей системы и . Хотя знак обобщенных скоростей произволен, покажем, что удобнее давать положительные скорости.

Сначала, для вычисления Qx дадим скорость < 0 , положив = 0. При этом вся система движется поступательно налево со скоростью . На горизонтальном движении вертикальные силы тяжести не имеют мощности, поэтому

*Nх = 0* и *Qx = 0* (12)

Чтобы вычислить обобщенную силу Qφ, дадим системе возможные скорости Vх = 0, < 0. Тело m1 остается неподвижным, маятник вращается по часовой стрелке. Мощность создает только момент силы m2**g** на угловой скорости .

Таким образом

 Чтобы не ошибиться в знаке силы, удобно давать положительные обобщенные возможные перемещения.

Название «эллиптический маятник» объясняется тем, что масса m2 движется по эллипсу, что видно из анимации

http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/pendelip2.html

**Статический принцип возможных мощностей в обобщенных координатах.**

Известно условие сохранения покоя системы в данном положении

Поскольку

а все обобщенные скорости независимы, то в обобщенных координатах принцип приобретает вид

Таким образом, для сохранения покоя нужно, чтобы в данном положении все обобщенные силы обратились в ноль.

**Тождества Лагранжа**

Рассмотрим систему материальных точек {с идеальными голономными нестационарными связями и *l* степенями свободы. Возможная скорость точки в обобщенных координатах имеет вид

При этом

***Первое тождество Лагранжа***

Вытекает из (17) поскольку является линейной функцией *i* с коэффициентами .

***Второе тождество Лагранжа***

доказывается прямым вычислением правой и левой частей тождества.

Производная (18) по времени, и частная производная (17) по дают одно и то же выражение:

**Уравнения Лагранжа второго рода.**

Запишем общее уравнение динамики

в обобщенных координатах.

Подставив выражение виртуальной (относительной) скорости

получаем

Как известно, суммы

являются обобщенными силами.

Найдем сумму

Здесь

- кинетическая энергия системы, и использованы тождества Лагранжа

Подставляя (25) и (26) в (24), получаем запись общего уравнения динамики в обобщенных координатах:

Выражения в скобках формулы (24), а значит и выражения в скобках формулы (29) являются проекциями второго закона Ньютона на касательную к связям плоскость Как было показано, они **не зависят** от обобщенных скоростей . Поэтому все скобки должны быть равны нулю.

Приходим к уравнениям Лагранжа.

Уравнения Лагранжа являются наиболее универсальным алгоритмом для вывода дифференциальных уравнений движения системы по связям.

Чтобы получить дифференциальные уравнения, нужно:

* + - 1. Записать функцию кинетической энергии Т через обобщенные координаты и скорости
      2. Взять соответствующие производные от кинетической энергии Т
      3. Вычислить обобщенные силы Qi одним из способов
      4. Подставив результат в уравнения Лагранжа, получить ***l*** штук обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат как функций времени

Преимущества и недостатки метода Лагранжа по сравнению с методом Ньютона:

1. Метод Лагранжа сводится к формальному дифференцированию функции Т. Он эффективен, но не демонстрирует физические законы, как это делает метод Ньютона.
2. Метод Лагранжа изначально исключает из рассмотрения реакции идеальных связей. Для определения этих реакций после интегрирования уравнений движения приходится обращаться к методу Ньютона.

**Пример**

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения эллиптического маятника ***методом Ньютона***, пришлось бы:

m2g

x

φ

m1g

*l*

* учесть реакцию идеальной связи в виде натяжения нити,
* составить одно уравнение поступательного движения тела m1,

и два уравнения плоского движения точки m2.

* Из трех уравнений- два будут дифференциальными и одно послужит для определения натяжения нити.

Найдем дифференциальные уравнения ***методом Лагранжа:***

Система имеет две степени свободы, которым соответствуют обобщенные координаты x, φ и уравнения Лагранжа

Обобщенные силы мы нашли раньше

Кинетическая энергия системы по теореме косинусов

Поскольку кинетическая энергия не зависит от х:

и Qx= 0, то первое уравнение имеет «циклический» (см. далее) интеграл

Замечаем, что этот интеграл выражает ожидаемое свойство сохранения количества движения системы вдоль оси х (горизонтальные внешние силы отсутствуют).

Дифференцируя (36) получим первое дифференциальное уравнение движения системы

Для получения второго уравнения, найдем соответствующие производные.

При подстановке во второе уравнение Лагранжа подобные выражения сокращаются, и мы находим второе дифференциальное уравнение движения системы

При фиксации тела m1 получаем уравнение колебаний математического маятника m2



Полезной может оказаться следующая анимация