***Лекция 3***

**Преобразование матрицы инерции при параллельном переносе системы координат из центра инерции. Формула Штейнера**

Рассмотрим тело в сферическом движении. Его кинетические моменты относительно центра масс и неподвижной точки О связаны соотношением:

(1)

Скорость центра масс С находим по формуле Эйлера.

В матричной форме

*VC =  RC* (2)

где *R****C*-** присоединенная матрица столбца *r****C***

В матричной форме кинетические моменты

*Kо = Jo Kс = Jс *

Здесь *J****O***  и *Jс* - матрицы инерции в неподвижных и подвижных осях.Подставив эти выражения в матричную формулу (1), получим:

*KO=(JC MRC2) *(4)

Сравнивая последние две формулы, приходим к ***обобщенной формуле Штейнера- Гюйгенса***

*JO= JC*M*RC*2 (5)

Формула (5) позволяет определять компоненты матрицы инерции при параллельном переносе осей координат.

Пусть xyz и xC yC zC - попарно параллельные оси координат с началом в О и в С соответственно.



Найдем, как изменяется осевой момент инерции при переносе. Сравнивая правые нижние элементы матричного выражения (5), находим

Jz = Jzc + M (xC2 + yC2) = Jz’+ Md2 (6)

Здесь d- расстояние между осями x и xC. Это ***формула*** ***Штейнера,*** выражающая момент инерции тела относительно произвольной оси через момент инерции относительно параллельной ей центральной оси.

Формула (6) показывает, что момент инерции относительно центральной оси минимален: он меньше момента инерции относительно любой другой параллельной ей оси.

Jzc < Jz

Сравнив недиагональные элементы матричного соотношения (6), найдем формулу преобразования центробежных моментов инерции при переносе системы отсчета. Например

(7)

**Кинетический момент вращающегося тела.**

Совместим ось z с осью вращения и выберем начало в подпятнике О. Тогда x= y= 0.

1. Пусть ось z является не центральной и не главной осью в точке О. Тогда формула (3) приобретет вид

=* z* (8)



Видим, что векторы **KO** и **** не параллельны друг другу (Рис.2).

По формуле связи кинетических моментов относительно центров О и А, с учетом того, что ось не центральна, находим

**KА= KО+ АО×**M**VC** ≠ **KО** (9)

1. Пусть ось z – не центральная, но главная в О. Тогда

= * z* (10)

и **КО**  будет направлен вдоль оси вращения (Рис.3). **КА** , однако, по-прежнему ≠ **KО** поскольку ось не центральная.





1. Если, наконец, ось z является и главной в О и центральной, то по (9) кинетический момент не будет зависеть от положения неподвижного центра на оси вращения (Рис.4). Это значит, что

**KА= KО = KС** (11)

И все они лежат на оси вращения. Отсюда следует, что

***главная центральная ось является главной в любой своей точке***.

**Общие уравнения движения твердого тела.**

**Динамическая эквивалентность нагрузок.**

Основной задачей динамики твердого тела является определение его движения под действием заданных сил (нагрузки) и реакций связей. Если тело свободно (Рис.5), то связи и их реакции отсутствуют, и следует найти шесть функции закона движения тела: координаты центра масс (xAyAzA) и углы Эйлера (.







Рис.5

Рис.6

Рис.7

Если тело несвободно, то, кроме закона движения, следует найти и реакции связей., и Рассмотрим частные случаи движения тела при отсутствии трения.

Положение тела в плоском движении (Рис.6) определяют координаты (xС yС ). Связи (плоскость х у) вынуждают тело двигаться плоско. При этом возникают три интегральные реакции: нормальная реакция N и моменты относительно осей x и у. Неизвестных оказывается опять шесть.

Вращающееся тело (Рис.7) имеет одну координату (угол поворота ) и пять неизвестных реакций XAYAZAXBYB. Всего шесть неизвестных.

Таким образом, для любого движения твердого тела необходимо составить шесть уравнений для определения закона движения и реакций связей. Назовем их ***общими уравнениями движения тела***.

Общие уравнения движения тела вытекают из двух общих теорем: о движении центра масс и об изменении относительного кинетического момента.

Матрично

Дифференцировать левую часть (15) невозможно, поскольку тело вращается относительно неподвижной системы отсчета, и матрица инерции *J****С*** (t) является неизвестной функцией времени в выражении кинетического момента

KС(t) = *J*С(t) (t) (16)

Эту проблема исчезает, если движение тела рассмотреть в системе отсчета, связанной с телом с координатами, где матрица инерции будет постоянной.

Абсолютную производную от вектора

(17)

заданного в подвижной системе отсчета следует вычислять по теореме о связи производных (вспоминаем сложное движение точки):

Матрично, с учетом (16)

Приходим к искомым ***общим уравнениям движения*** тела в системе отсчета, связанной с телом

Здесь внешние силы разделены на активные силы (нагрузку) и реакции связей (индекс R)

В случаях сферического и вращательного движений во второй формуле центр масс С следует заменить на неподвижную точку О.

В развернутом виде общие уравнения (20) представляют собой систему шести скалярных уравнений. В них входят столько дифференциальных уравнений *l*, сколько степеней свободы имеет твердое тело (*l* ≤ 6). Остальные 6- *l* уравнений определяют реакции связей.

***Эквивалентными*** назовем нагрузки, вызывающие одинаковые дифференциальные уравнения (ускорения) движения тела реакции связей. В Статике движения отсутствовало, и мы называли ***статически эквивалентными*** системы сил, вызывающие одинаковые реакции. Было показано, что условием статической эквивалентности двух нагрузок является равенство их главных векторов и главных моментов.

Уравнения (20) однозначно определяют ускорения и реакции связей тела по заданной нагрузке (активным силам). Значит, ***условием динамической эквивалентности*** двух нагрузок, приложенных к твердому телу, является знакомое нам условие равенства главных векторов и главных моментов нагрузок.

**Общие уравнения поступательного движения тела**

Поскольку в пространственном поступательном движении тело не вращается:

** = 0 (** = 0) *=* 0 (21)

и главный вектор реакций связей равен нулю, то уравнения (20) приобретают вид

Три дифференциальных уравнения определяют закон движения тела x(t), y(t), z(t), а остальные уравнения служат для нахождения главных моментов реакций связей относительно трех осей.