***Лекция 1***

**Общие теоремы динамики системы**

**Материальная система. Центр масс и центр тяжести. Классификация сил. Дифференциальные уравнения движения системы.**

***Материальной системой*** назовем множество материальных точек движение которых существенно зависит от их взаимодействия. Пример: солнечная система.

mk

mk+1

**r**c

C

**r**k+1

**r**k

**F**i

**F**i’

m1

mn

m2

x

z

y

Система материальных точек, взаимодействием которых можно пренебречь по сравнению с действием внешней среды, не является материальной. Пример: группа самолетов.

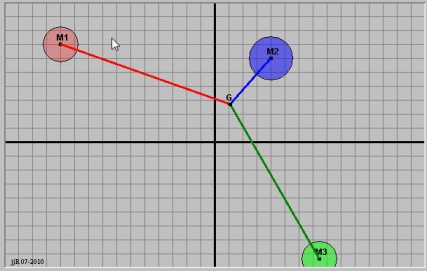
***Массой системы*** называется арифметическая величина, равная сумме масс точек системы

Движение точек рассматривается по отношению к инерциальной ***системе отсчета***– трехмерному пространству, с которым связан наблюдатель, умеющий измерять расстояния и время. Система отсчета инерциальна, значит в ней выполняются законы Ньютона. С системой отсчета связана система координат x,y,z.

***Центром масс*** системы называется геометрическая точка C, радиус-вектор которой определен формулой

Координаты центра масс

Отметим, что в центре масс нет никакой массы, но эта точка имеет большое значение для изучения движения системы.

 Анимация



показывает, как изменяется положение центра масс при изменении положения точек системы. В Интернете можно посмотреть другую анимацию

<http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/barycentre.html>

***Твердое тело*** – система бесконечного, но счетного числа материальных точек, расстояние между которыми неизменно во времени. Элементарная точка тела объема dV имеет массу

где – плотность тела, зависящая от радиуса вектора точки. Тело называют однородным, если γ не зависит от r.

Объем тела есть интеграл по объему

Масса тела

Центр масс тела определяется вектором

Для однородного тела и

Поле силы тяжести определяется вектором ускорения силы тяжести, зависящего от положения точки **g (r)** . Силой тяжести элементарного объема называется вектор

z

x

y

dm

**g**

**P**

C

Тяжесть тела есть вектор

**P=**

Для однородного тела

Для небольших тел вблизи Земли ускорение силы тяжести можно считать параллельным вертикальной оси z

( **-**орт вертикали).

Тогда для однородного тела

Центром тяжести тела называется точка с радиусом вектором

Поле однородно, если **g** одинаково для всех точек. Тогда тяжесть тела есть вектор

и центр тяжести совпадает с центром масс тела

Поле Земли неоднородно, поэтому центр тяжести телевизионных башен не совпадает с их центром масс. Вопрос: что выше?

***Классификация сил материальной системы***

Силы, действующие на точки материальной системы естественно разделить на два класса. ***Внутренними силами*** назовем силы взаимодействия между точками системы, ***внешними силами*** - силы взаимодействия точек системы с точками вне системы. Это деление условно, оно зависит от выбранных границ системы. Так, для мела, лежащего на столе, сила взаимодействия со столом является внутренней для системы мел + стол, и внешней, если стол не включать в систему.

*Свойства внутренних сил*

По 3му закон Ньютона внутренние силы являются парными, значит их главный вектор и главный момент относительно любой точки равны нулю.

Здесь - равнодействующая (сумма) внутренних сил, приложенных к точке

Внутренние силы уравновешены только для твердого тела. Cолнечная система, напротив, движется именно под действием внутренних сил.

***Дифференциальные уравнения движения системы***

2й закон Ньютона для точек системы

дает n векторных обыкновенных дифференциальных уравнений 2го порядка относительно законов движения точек

Для решения задач требуется скалярная запись уравнений. В декартовой системе координат они эквивалентны 3n скалярных уравнений.

В большинстве случаев проинтегрировать эти уравнения аналитически невозможно, тем более, что внутренние силы являются неизвестными функциями. Даже когда они известны, например, в задаче о трех точках, взаимодействующих по закону всемирного тяготения, аналитического решения нет. Численно они интегрируются без проблем на компьютере.

Иногда достаточно исследовать движение системы «в целом». Особенно это верно для твердого тела. Для него достаточно узнать, как движется центр масс системы и как тело вращается вокруг центра масс.

Изучить движение системы в целом позволяют 3 общие теоремы динамики системы:

- теорема об изменении количества движения (иначе, теорема о движении центра масс),

- теорема об изменении кинетического момента,

- теорема об изменении кинетической энергии.

**Теорема об изменении количества движения системы**

**Теорема о движении центра масс системы**

**Количество движений точки и системы.**

***Количеством движения точки***  системы называется вектор

где – скорость точки в инерциальной системе отсчета.

***Количеством движения системы*** называется главный вектор количеств движения всех точек системы

mk

**V**k

**q**k

В проекциях на декартовы оси

Поскольку массы точек постоянны, то количество движения **Q** можно выразить через скорость центра масс

***Примеры.***

а) Если центр масс вращающегося тела лежит на оси вращения, то **V**C**=** 0, и количество движения тела равно нулю.

б) Количество движения колеса зависит только от скорости его центра **V**Cи не зависит от его угловой скорости.

**Теорема об изменении количества движения**

**Теорема о движении центра масс системы**

Запишем 2й закон Ньютона для точки mk системы в виде

Здесь **-** равнодействующая всех внутренних сил, а - внешних сил, приложенных к точке mk. Суммируя по k, получаем

Главный вектор внутренних сил равен нулю, что приводит к теореме об изменении количества движения системы

Теорема в проекциях на декартовы оси

Поскольку

то теорему об изменении количества движения можно записать в виде ***теоремы о движении центра масс***

Теорема имеет знакомый вид второго закона Ньютона и может быть прочитана так:

***Центр масс системы движется как материальная точка с массой системы M,***

***к которой приложены все внешние силы системы*.**

Следует помнить, что в центре масс нет никакой массы, но эта точка движется именно так.

Например, если пренебречь сопротивлением воздуха, то после взрыва снаряда фейерверка, центр масс его частей продолжает двигаться по той же траектории (параболе), что и не разорвавшийся снаряд.

Теорема в проекциях на декартовы оси

***Следствия из теорем***

1. Внутренние силы ***непосредственно*** не влияют на количество движения системы **Q** и на скорость центра масс . Однако они могут вызвать внешние силы, которые могут изменить количество движения.

Так, внутренние силы в двигателе автомобиля вызывают силу трения между колесами и дорогой, которая и движет автомобиль, изменяя скорость его центра масс.

Другой пример объясняет «чудо». В Южной Америке есть дерево, с которого осенью падают орехи. Через некоторое время твердые орехи начинают прыгать, вызывая ужас у непосвященных. Ведь твердое тело не может прыгать. Объяснение нашли, расколов орех. Там обнаружили жучка, появившегося из личинки, прогрызшей орех и съевшей его содержимое. В образовавшемся пространстве жучок начинает прыгать. С ним прыгает и орех. Так внутренние силы жучка вызывают внешнюю реакцию Земли, которая приводит в движение центр масс системы жучек - орех. Абсолютно аналогично Вы можете встать на стул, накрыться коробкой и прыгать вместе с этой твердой оболочкой.

1. Если **Ve = 0**, то **Q** и **Vc** сохраняются. Так, центр масс солнечной системы движется равномерно и прямолинейно во вселенной.

Траектория движения центра масс брошенной вилки не зависит от ее вращения. Анимацию можно посмотреть на сайте http://www.ostralo.net/3\_animations/swf/CentreInertie.swf

1. Если Vx e **= 0**, то Qxи сохраняются.

Так, при движении автомобиля с реактивным двигателем, центр масс системы автомобиль-топливо остается на месте: автомобиль и выхлопные газы движутся при этом в разные стороны.

Здесь можно привести, также, пример известной аферы. В 80х годах на научно популярных телепередачах демонстрировались «инерцоиды». Они, якобы, доказывали существование кроме общепризнанных опорного и реактивного способов движения, еще и «инерционного» способа.

Демонстрировалась коробочка на тележке со свободно вращающимися колесами. Включался тумблер, и внутри коробочки начинал жужжать механизм. Тележку ставили на пол и отпускали без толчка. Тележка начинала движение, что, якобы, доказывало наличие инерционного способа движения.

**Vc**

m1**g**

m2**g**

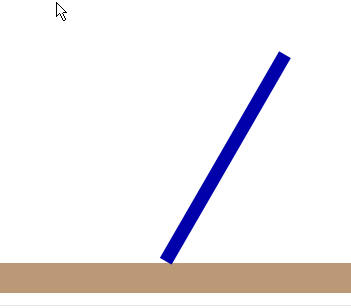
ω

**VCx**

С

Ничего нового этот эксперимент не доказывает. Он просто иллюстрирует следствие 3.

Если открыть коробочку, то под ней обнаружится моторчик с неуравновешенным грузиком. В момент отпускания тележки внешние силы вдоль оси х исчезают, и дальше центр масс сохраняет горизонтальную составляющую своей скорости **VCx**. При этом сама тележка движется не равномерно, а рывками.



Другим примером является падение стержня, опирающегося на гладкую горизонтальную плоскость, из состояния покоя. Поскольку горизонтальные силы отсутствуют, то центр масс стержня движется по вертикали. Для просмотра анимации, активируйте ссылку



Vc