***Лекция 5***

**ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ**

Теорема об изменении кинетической энергии точки и системы.

Мощность и элементарная работа силы.

Второй закон Ньютона для свободной точки

τ

**F**

**Fτ**

**V**

d**r**

𝛼

Рис.1

(1)

связывает ускорение точки с силой .

Как известно, скорость точки и ее закон движения определяются не только силой, но и начальными условиями. Всегда можно задать такие условия, чтобы точка оказалась в любой заданной точке пространства. В данном положении точки множеству начальных условий соответствует множество ***возможных скоростей*** . Они имеют произвольное направление и модуль.

Конкретным начальным условиям соответствует ***действительная скорость*** , которая принадлежит множеству возможных скоростей.

Умножим закон Ньютона скалярно на действительную скорость точки

(2)

Левую часть выражения можно представить в виде

Положительная величина

называется кинетической энергией точки.

Правая часть (2)

называется ***мощностью*** силы **F .** Приходим к ***теореме об изменении кинетической энергии***:

(5)

***Скорость изменения кинетической энергии точки равна мощности силы.***

Если (1) умножить на возможную скорость, то (5) станет теоремой об изменении возможной кинетической энергии точки.

В декартовых координатах мощность можно найти по формуле:

(6)

В естественных осях

(7)

Иначе говоря**,** мощностьсоздается только касательной составляющей силы. Мощность силы, равная скорости возрастания кинетической энергии точки максимальны при совпадении скорости с направлением силы в данный момент времени.

Кинетическая энергия быстрее всего уменьшается, если скорость точки направлена против силы.

Скорость изменения кинетической энергии равна нулю при взаимной перпендикулярности скорости и силы. Или при равенстве скорости нулю. Например, сила трения сцепления колеса с дорогой не развивает мощности при отсутствии проскальзывания. Мощность создает момент двигателя на оси колеса. Но в момент трогания и его мощность равна нулю.

Теорему (5) после умножения на dt можно записать в виде

Величина

называется ***элементарной работой*** силы ***F .*** Перемещение называется ***элементарным*** ***перемещением*** точки. Приходим к теореме в дифференциальной форме

(8)

Штрих в обозначении призван подчеркнуть, что в общем случае элементарная работа не является дифференциалом некоторой функции (А). В дальнейшем увидим, что только для «потенциальных» сил элементарная работа является полным дифференциалом функции потенциальной энергии П.

Раскроем скалярное произведение

(9)

Из этого представления вытекает:

1. Знак работы определяется знаком Cos: работа положительна, если направление силы и перемещения совпадает с точностью до π/2.
2. Работу совершает только касательная составляющая силы.
3. Работа равна нулю, если сила перпендикулярна перемещению.

Рассмотрим движение системы материальных точек { в инерциальной системе отсчета. ***Кинетической энергией системы*** называется положительная величина

Равнодействующие внешних и внутренних сил, действующих на точку обозначим **.** Суммируя теоремы об изменении кинетической энергии для всех точек системы, приходим к теореме для системы

где - мощности внешних и внутренних сил системы.

Системы, в которых суммарная мощность внутренних сил на любых возможных скоростях равна нулю, называются ***неизменяемыми системами.*** К таким системам относятся системы твердых тел, связанных нерастяжимыми нитями (смотри доказательство идеальности внутренних связей твердого тела и нерастяжимой нити).

**Теорема Кенига.**

В центре масс системы { с радиусом вектором

выберем начало осей x y z ***С-пространства***, движущегося поступательно вместе с центром масс С***.*** Относительный радиус вектор точки системы относительно центра масс обозначим **ρ.** Теперь абсолютную скорость точки mk представим в виде

Переносная скорость для всех точек системы одинакова



(14)

Подставляем в формулу кинетической энергии

Приходим к ***теореме Кенига***

*Кинетическая энергия системы складывается из энергии поступательного движения системы с центром масс и энергии относительно С - пространства.*

**Кинетическая энергия твердого тела.**

Рассмотрим ***свободное движение*** твердого тела относительно инерциальной системы отсчета (Рис.2). В формуле Кенига

второе слагаемое является кинетической энергией тела в сферическом движении вокруг центра масс С. Поскольку тело сплошное, то сумма становится интегральной по объему тела, а масса точки элементарной массой dm,

Относительная скорость точки Vr в сферическом движении вокруг центра масс C должна быть найдена по формуле Эйлера.

**Vr=×= ×**

В матричной записи

*Vr= R* (19)

Здесь *R-* присоединенная кососимметричная (*RТ=R)*  матрица радиуса вектора **rC**

Вычислим квадрат относительной скорости точки с учетом (19)

Подставив это выражение в формулу (17), получим

В квадратных скобках узнаем выражение матрицы тензора инерции относительно центра масс С.

*JC=* dm (20)

Теперь формула кинетической энергии тела в свободном движении приобретает вид

T= (MVC2 + *TJC*) (21)

***Поступательное движение тела***

В этом случае тело не вращается (=0) скорости всех точек одинаковы (V) и значит

T= Mv2 (22)

***Сферическое движение*** тела вокруг центра О

Повторив выкладки (17) для Tr в свободном движении, но для центра О, получим аналогичную формулу

1) T= *TJO*

С другой стороны, мы знаем, что в сферическом движении скорости распределены в теле как если бы оно вращалось вокруг мгновенной оси L (Рис.3). Скорость точки



V=hL

Тогда

T= 2

Интеграл является моментом инерции относительно мгновенной оси

JL

и мы приходим ко второй формуле кинетической энергии тела в сферическом движении

1. Т= JL2 (24)

***Вращательное движение тела*** (Рис.4)

Движение является частным случаем сферического движения, когда мгновенная ось совпадает с осью вращения z: JL=Jz



T= Jz 2 (25)

***Плоское движение***телапараллельно плоскости xy (Рис.5).

Вектор угловой скорости направлен вдоль оси z:

T=(0 0 z)

Первую формулу получим из теоремы Кенига

1) T = (MvC2+Jzc 2) (26)

Еще одну формулу получим, введя в рассмотрение мгновенную ось zP , проходящую параллельно z через мгновенный центр скоростей Р.

2) T= JzР 2 (27)



**Мощность силы, приложенной к твердому телу.**

***Свободное движение.*** Пусть движение тела характеризуется скоростью полюса А **vA** и угловой скоростью **ω** . Найдем мощность силы **F**, приложенной в некоторой точке М тела.



Здесь учтена теорема о распределении скоростей

и произведена круговая перестановка в смешанном произведении

В скобках узнаем выражение момента силы **F** относительно полюса А. Поскольку **ω** направлен вдоль мгновенной оси S, то

где ωS− проекция угловой скорости на S, а mS(F)− момент силы относительно этой оси. Приходим к выражению мощности силы:

(28)

Второе слагаемое положительно при совпадении направлений момента и вращения.

Заметим, что в отличие от формулы Кенига для кинетической энергии, полюс А здесь − произвольная точка тела, не обязательно центр масс.

Если к телу приложена система сил **{F}={F1F2 ...Fk...Fn}**, то после суммирования по к, получим

(29)

Здесь**−** главный вектор, а *MS*− главный момент относительно оси S системы внешних сил.

Пользуясь общей формулой, получим выражения работы для простейших движений тела.

***Поступательное движение***

Тело в поступательном движении не вращается (d’ϕS=0) и все его точки имеют одинаковое элементарное перемещение d**r**

(30)

***Вращательное движение***



Здесь есть смысл выбрать полюс А на оси вращения z, с которой совпадает мгновенной ось S. Тогда **VA**=0 иформула (\*) показывает, что мощность имеют моменты сил относительно оси вращения:

(31)

Знак плюс, если момент сонаправлен с угловой скоростью.

***Плоское движение***



Вспомним, что в этом движении направление мгновенной оси тоже не изменяется, она перпендикулярна плоскости движения. Формула приобретает вид

(32)

Как известно, если ω не равно нулю, то существует мгновенный центр скоростей Р, скорость которого (а значит и элементарное перемещение) равна нулю в данный момент. Выбрав Р за полюс, из (32) найдем, что в плоском движении работу ***совершают моменты сил относительно Р***.

(33)

**Конечная работа силы.**

Рассмотрим движение точки М под действием силы **F** по траектории из положения М1 в положение М2. Разобьем кривую М1 М2 на n частей. Проведем векторы перемещений из узла в узел и обозначим работу на этих перемещениях через

**F** (xkykzk)

M2

Mk (xkykzk)

**Δrk**

Рис.9

M1

ΔАк= **F** (xkykzk)  **Δrk**

***Конечной работой*** силы F на перемещение точки из положения М1 в положение М2 называется скалярная величина равная пределу

Этот предел является криволинейным интегралом 2го рода

(35)

Что нужно знать, чтобы вычислить интеграл конечной работы?

1. Если сила зависит от всех параметров, то нужно знать закон движения точки **r**(t).  
   Тогда этот интеграл становится определенным интегралом по времени
2. В случае ***силового поля*** – пространства, в каждой точке которого задана функция силы **F**(**r)** , для вычисления нужно знать траекторию точки:
3. Существуют силовые поля, называемые ***потенциальными***, в которых для вычисления конечной работы нужно знать только начальное и конечное положение точки. Подробно такие поля будут рассмотрены ниже. Здесь приведем примеры вычисления конечной работы потенциальных сил.

***Работа постоянной силы F = Const*** (Рис.10)

1

2

**F**

**△r**

**r2**

**r1**

Рис.10

***Работа силы тяжести***.

Сила тяжести есть частный случай постоянной силы. Проведем ось z вертикально вверх. Тогда:

h

**P=**m**g**

x

y

2

z

1

Рис.11

Обычно эту формулу записывают в виде

Работа силы тяжести положительна, если (z1-z2) > 0, т.е. если точка опускается.

***Работа силы упругости*** линейной пружины:

Деформацией Δ пружины называется изменение ее длины *l*o. ***Жесткостью*** пружины с (н/м) называется сила, необходимая для ее удлинения на единицу длины. Деформация Δ вызывет упругую силу **F**.

x

с

O

*l*o

**F**

х

Рис.12

Пружина линейно упруга, если упругая сила линейно зависит от деформации

F = с Δ.

Сила направлена к началу О координаты х, выбранному в положении равновесия груза. Поэтому сила F называется ***восстанавливающей*** (положение равновесия), ‌‌‌

│х│= Δ и Fх = - с х

Элементарная работа силы d’A= - cx dx. При перемещении конца пружины из положения с координатой х1 в положение х2, упругая сила совершает конечную работу

A12= - с = с(х12-х22)

Квадраты координат заменим квадратами деформаций

A12= с (Δ 12- Δ 22) (40)

Знак работы определяется соотношением начальной и конечной деформаций пружины.

***Работа момента упругости спиральной пружины***

Рассмотрим стержень, вращающийся вокруг вертикальной оси под действием спиральной пружины. Жесткость c’ (нм) такой пружины равна моменту, закручивающему пружину на один радиан. Деформация пружины, измеряемая углом закручивания Δ’= φ в радианах, вызывает момент упругости

М = - с’φ

Элементарная работа силы d’A= - c’ φ d φ. При повороте стержня из положения с координатой φ 1 в положение φ 2, упругий момент совершает конечную работу

c'

φ

М=-с φ

A12= - с’ = с’(φ 12- φ 22)

Квадраты координат заменим квадратами деформаций

A12 =с(Δ’ 12- Δ’ 22) (41)

Знак работы определяется соотношением начальной и конечной деформаций пружины.