***Лекция 4***

**Общие уравнения вращения тела.**

Пусть тело вращается вокруг оси z (Рис.1). Тогда, опуская «волну» над индексами подвижных осей, имеем:

С

x

y

z

**XO**

**YO**

**ZO**

**XA**

**YA**

Рис. 1

Здесь *E*  и - матрицы углового ускорения и угловой скорости.

Из (1) получаем полные уравнения вращения тела

(3)

+= (4)

В развернутом виде

В этих уравнениях шесть неизвестных: закон вращения  (t) и пять составляющих реакций подшипников. Собственно ***дифференциальным уравнением вращения*** является последнее уравнение

Уравнение (6) определяет закон вращения φ (t). Остальные уравнения служат для определения реакций подшипников по найденному закону вращения.

Следует помнить, что силы, приложенные к телу, могут зависеть от угла поворота и угловой скорости тела. С помощью уравнения (6) можно решать прямые и обратные задачи динамики вращения тела. Из него вытекает также ***силовое условие равнопеременного вращения***. Очевидно, что для сохранения углового ускорения постоянным необходимо, чтобы главный момент приложенных сил был постоянным.

Mz= Const (7)

Чтобы тело вращалось равномерно, момент должен быть равен нулю

Mz= 0 (8)

**Уравновешенность вращающегося тела**

После того как закон движения найден из дифференциального уравнения вращения, из остальных уравнений (5) можно найти реакции опор XОYОXАYА и ZО. Из уравнений видно, что ZО не зависит от вращения тела, а остальные реакции могут зависеть.

Опыт показывает, что при больших угловых скоростях вращения эти реакции могут достигать значений, опасных разрушением подшипников. Поэтому актуальным является знание условий, позволяющих избежать такой опасности.

Тело называется ***динамически уравновешенным*** относительно оси вращения, если реакции подшипников не зависят от скорости вращения тела. Чтобы найти условия уравновешенности, исследуем уравнения для реакций, которые могут зависеть от вращения

Очевидно, что если бы левые части этих уравнений были равны нулю

Очевидно, что если бы левые части этих уравнений были равны нулю

то реакции не зависели бы от вращения тела.

Условия (10) образуют две однородные алгебраические системы уравнений. Определители матриц этих двух систем уравнений (10) отличен от нуля

(11)

Это значит, что уравнения имеют только нулевое решение. В этом случае ось является ***центральной и главной***

Условие (12) обеспечивает уравновешенность, которая называется ***статической***, поскольку легко проверяется “статическим” опытом. Если расположить ось вращения тела горизонтально, и тело будет сохранять покой при любом угле поворота, то ось центральна. Например, взяв велосипедное колесо за ось, легко определить, что его ось не является центральной, т.к. ниппель заставит колесо повернуться в свое нижнее положение.

Таким образом, чтобы тело было ***динамически уравновешенным*** необходимо и достаточно чтобы ось вращения была ***центральной и главной*** осью инерции.

**Уравнения плоского движения тела**

Чтобы воспользоваться общими уравнениями динамики тела, придется рассмотреть движение плоской фигуры, полученной сечением тела через центр масс С параллельно плоскости движения тела.

Совместим плоскость осей ху с плоской фигурой тела, а их начало с центром масс С. Тогда **WC** и главный момент реакций гладкой плоскости будут лежать в плоскости ху, угловая скорость и ускорение , и главный вектор ***N*** плоскости будут направлены вдоль оси z. Уравнения движения

(16)

+=

в проекциях на оси приобретут вид

Первое, второе и последнее уравнения

являются ***дифференциальными уравнениями плоского движения тела***. Они вместе с начальными условиями определяют закон плоского движения x(t), y(t), φ(t). Из остальных трех уравнений, после определения ускорений, можно найти проекцию главного вектора нормальных реакций ZAR и главные моменты реакций MxR и MxR. Заметим, что реакции плоскости не будут зависеть от движения тела, если ось zC является главной в центре С.

**Сопротивление движению колеса**

В рамках классической механики рассматриваются только абсолютно твердые тела. При движении твердого колеса по твердой дороге не возникает сопротивления. Опыт показывает, что при движении реального колеса по реальной дороге сопротивление возникает. Его природа лежит в деформации как колеса, так и дороги.

**Момент сопротивления качению мягкого колеса по твердой дороге (традиционная модель)**

Традиционная модель описывает сопротивление вращению деформируемого колеса на твердой дороге («спущенное» колесо автомобиля на асфальте) (Рис.2).

Рис 2

(Традиционная модель, правильный рисунок)

m**g**

**M**

**Fтр**

С

**N**

k

Такое сопротивление связано с внутренним трением в материале колеса при его деформации и возникает только при внешнем вращательном воздействии (моменте или силе трения), стремящемся повернуть колесо, и не зависит от движения его центра. Поскольку при недостаточной силе трения ведомое колесо может не повернуться, рассмотрим сначала ***ведущее*** ***колесо***.

При отсутствии вращательного момента М деформация колеса симметрична и реакция **N** центральна (k=0 на Рис.2).

Момент М вызывает смещение реакции **N** на х в ту сторону, которая создает уравновешивающий момент –Nх = М. Смещение х растет вместе с ростом момента М вплоть до начала вращения колеса, когда смещение х достигает предельного значения k.

Пара {N,mg} (***момент трения качения***), как любая пара сил, работает только на повороте колеса, независимо от того, движется центр колеса или нет. При отсутствии трения ***ведущее колесо*** вращается на месте.

***Ведомое колесо*** начнет двигаться под действием силы **F**,, когда центральная движущая сила станет больше предельного значения силы трения (F > Fтр=mgf), и начнет вращаться только при наличии трения сцепления (при r Fтр > mgk , или иначе при fr > k). При малом коэффициенте трения fr < k колесо будет скользить без вращения, что фактически и происходит на льду со спущенным задним колесом переднеприводного автомобиля.

Рис 3

(Традиционная модель, правильный рисунок)

m**g**

**Fтр**

С

**N**

k

**F**

**Сила сопротивления движению твердого колеса по мягкой дороге.**

Рассмотрим движение твердого колеса по «мягкой» дороге (каток по мягкому асфальту). Сопротивление дороги связано с внутренним трением материала дороги при ее деформации. Оно возникает только при движении центра колеса. Поскольку при слабом сцеплении с дорогой ведущее колесо может буксовать на месте, то рассмотрим сначала ***ведомое колесо*** (Рис.4).

**F**

С

**F**сопр

**R**

**N**

**k1**

**r**

α

m**g**

**Fтр**

Рис.4

Свободное покоящееся колесо симметрично деформирует дорогу. На площадке контакта действуют нормальные распределенные реакции. Они все проходят через центр колеса. Равнодействующая нормальных реакций **R** вертикальна и проходит через центр колеса.

Движущая сила **F** делаетдеформацию дороги не симметричной. Точка приложения равнодействующей **R** смещается вперед на х, и сама она, оставаясь центральной, наклоняется против движения колеса .

**Fтр**

Рис.5

m**g**

**F**сопр

**N**

С

Р

**F**

C ростом движущей силы **F** смещение х будет расти и достигнет предельного значения k1 при начале движения центра колеса (с вращением или без него). Назовем k1 ***коэффициентом сопротивления дороги***. Можно предположить, что k1 не зависит от радиуса колеса.

Переместим реакцию **R** в центр колеса (Рис.5). Ее составляющая **N** уравновесит нагрузкуm**g.** Составляющую **Fсопр** назовем ***силой сопротивления дороги***.

Найдем модуль силы сопротивления. Угол α мал, поэтому следует положить:

Cos α ≈ 1, Sin α ≈ k1/r и N ≈ R = mg Fтр ≈ Rтр

Таким образом

Fсопр = R Sin α = NSin α ~ mg k1/r

Сила сопротивления уменьшается с увеличением радиуса колеса, что объясняет лучшую проходимость автомобилей с большими колесами.

***Ведущее колесо*** движется под действием момента М. При недостаточном сцеплении ***ведущего колеса*** с дорогой

**Fтр**

Рис.6

m**g**

**F**сопр

**N**

С

Р

**М**

f r < k1

максимальное значение силы ведущей силы трения Fтр = fmg оказывается меньше максимального значения силы сопротивления Fсопр = mg k1/r. Центр колеса не начнет двигаться, независимо от величины вращательного момента М. Начнетсябуксование колеса на месте.

Поскольку сила сопротивления дороги **F**сопр никак не связана с вращением, то такая же сила, возникает и при движении саней в глубоком снегу.

m**g**

**N1**

**R**

**Fcопр**

k1

**F**

**N2**

**Fтр**

Опыты показывают, что для пары материалов разной твердости, например дерево-сталь, коэффициент сопротивления качению твердого колеса по мягкой дороге значительно превосходит коэффициент сопротивления мягкого колеса по твердой дороге:

Стальное колесо по дереву: k1=0,15-0,25 см

Деревянное колесо по стали: k=0,03-0,04 см

При движении ***податливого колеса по податливой дороге*** возникает как момент сопротивления вращению, так и сила сопротивления дороги. К сожалению, оба эти сопротивления в справочниках сводятся к моменту, так для пары дерево / дерево дается коэффициент k = 0,05-0,08. Кроме того, в большинстве учебников традиционная модель трения качения ошибочно сопровождается (Рис.6), а не (Рис.3)