***Лекция 2***

**ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА**

**Кинетический момент точки и системы относительно центра и оси**

Рассмотрим точку массы , имеющую в данный момент количество движения .

***Кинетическим моментом*** точки относительно центра О называется вектор момента количества движения точки относительно центра О (Рис.1).

(1)



Запишем векторное произведение (1) в осях xyz в матричной форме:

(2)

Здесь *R-* кососимметричная присоединенная матрица столбца проекций *r*

(3)

Компоненты левого столбца - проекции кинетического момента на оси называются ***кинетическими моментами точки относительно осей x y z***. Они вычисляются либо аналитически по формулам (3), либо как момент силы относительно оси (Рис.2). Кинетический момент относительно оси дает только касательная составляющая вектора ***q***



(4)

Момент обращается в ноль, если вектор количества движения (скорость точки) лежит в одной плоскости с осью (параллелен или пересекает ось)

Рассмотрим материальную систему точек с массами , имеющих в данный момент скорости . ***Кинетическим моментом системы*** относительно центра О называется главный момент количеств движений точек системы относительно этого центра.

(5)

По аналогии с формулой (3) проекции вектора (5) образуют столбец кинетических моментов системы относительно осей координат

(6)

А

В

mj

**v**j

**rA**j

**rB**j

Найдем ***зависимость кинетического момента от центра***. Обозначим через радиусы векторы точки *mj* системы относительно центров А и В. Из рисунка

Тогда

С учетом

приходим к формуле зависимости кинетического момента системы от центра:

**;**

Формула напоминает зависимость главного момента системы сил от центра. Видим, что при неподвижном центре масс тела (например сферическое движение вокруг С или вращение тела вокруг центральной оси) кинетический момент не зависит от центра.

**Кинетический момент системы в сложном движении**

Наряду с с осями *x y z* инерциальной системы отсчета, введем оси, поступательно движущиеся с центром масс С системы . Пространство, связанное с подвижными осями назовем С пространством (Рис.3). Тогда движение каждой точки можно представить как сложное. Скорость точки будет складываться из переносной скорости, равной для всех точек скорости центра масс С и относительной скорости



(7)

Из рисунка следует

(8)

где  **-** относительный радиус вектор точки Теперь:

Второе и третье слагаемые в (9) равны нулю, поскольку относительный радиус вектор центра масс равен нулю, и ввиду поступательного движения С пространства

Получаем

Последнее слагаемое в (9) логично назвать относительным кинетическим моментом системы

(11)

Приходим к формуле, связывающей абсолютный и относительный кинетические моменты

**;** (12)

Заметим, что в отличие от похожей формулы, связывающей кинетические моменты относительно неподвижных центров,

в (12) центр масс С движется произвольно, а в входят относительные скорости точек. Вывод формулы показывает, что такая простая формула (12) справедлива только для центра масс, что подчеркивает значение этого центра в динамике.

**Теорема об изменении кинетического момента системы.**

Дифференцируя выражение (5) по времени, с учетом второго закона Ньютона, находим

С учетом свойств внутренних сил, приходим к ***теореме об изменении кинетического момента*** относительно неподвижного центра

В проекциях на оси xyz c началом в О теорема имеет вид

Подставим теперь выражение (12) в формулу (14). После дифференцирования получим

C учетом того, что

и теоремы о зависимости главного момента сил от центра

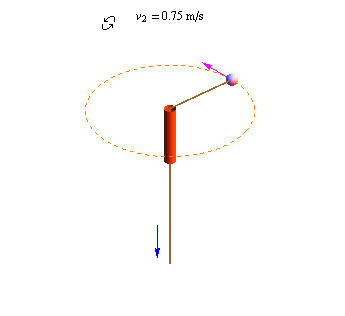
приходим к ***теореме об изменении относительного кинетического момента***:

В проекциях

***Следствия***

1. Внутренние силы не изменяют кинетического момента непосредственно. Однако, как и в теореме о движении цента масс, они могут вызвать внешние силы, изменяющие кинетический момент.
2. Если **MeO**=0, то **KO=Const** векторно. Так для Солнечной системы, которую можно считать изолированной от внешнего влияния удаленных галактик, вектор кинетического момента сохраняет свое направление и модуль. Перпендикулярная ему плоскость, называемая ***плоскостью Лапласа***, тоже сохраняет свое положение по отношению к гелиоцентрической инерциальной системе отсчета.



1. Если, в частном случае только Мz=0, то сохраняется соответствующая проекция кинетического момента Кz=Сonst. Так кинетический момент конического маятника относительно вертикальной оси не будет изменяться с течением времени, поскольку Мz=0. Значит, во время движения произведение mV h будет постоянным, т.е.



1. Анимация



позволяет увидеть как увеличивается скорость шарика при уменьшении радиуса его движения по гладкой горизонтальной плоскости (как у вращающейся фигуристки при опускании рук).

**ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

Динамика движения твердого тела полностью описывается двумя общими теоремами: теоремой о движении центра масс и теоремой об изменении относительного кинетического момента.

**Кинетический момент тела в сферическом движении.**

**Матрица инерции**

Рассмотрим твердое тело в сферическом движении вокруг неподвижной точки О. Поскольку тело сплошное, то в выражении кинетического момента ***Ko*** сумму следует заменить интегралом по объему тела, а массу точки – элементарной массой *dm*.

dm

**r**

****

s

Рис.6

(18)

Скорость точки тела находится по формуле Эйлера

Теперь

Представив векторное произведение в матричном виде

получаем матричную формулу кинетического момента (1)

Подставив (20) в (19), получим

В скобках выражения (2) находится матрица 3x3, которая называется ***матрицей*** ***инерции*** *J****о тела*** в центре О.

Таким образом, мы получили матричную формулу для кинетического момента тела в сферическом движении:

***Осевые и центробежные моменты инерции***

Вычислим матрицу .

Матрица инерции представляет собой матрицу интегралов от (24):

Видим, что матрица *Jo* симметрична ( и т.д.) и, значит, имеет только шесть различных элементов.

Диагональные элементы называются ***осевыми*** ***моментами инерции***  относительно осей x, y и z имеют выражения

(26)

Остальные три интеграла называются ***центробежными моментами инерции***

(27)

Размерность всех моментов инерции .

В принятых обозначениях матрица инерции приобретает вид

Рассмотрим основные свойства моментов инерции, (другие свойства будут рассмотрены в специальной главе).

*Осевые моменты инерции*

Заметим, что под знаками интеграла здесь стоят квадраты расстояний h от точки dm до соответствующей оси. Так . Поэтому момент инерции тела относительно произвольной оси L должен вычисляться по формуле:

где hL- расстояние от текущей точки dm до оси.

Видим, что осевой момент не может быть отрицательным или равным нулю, и характеризует удаленность точек тела от оси. Например, момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню, будет больше, чем относительно наклонной оси (Рис.7) поскольку x > h для любой точки стержня.



Jz > Jz’

Покажем, как практически вычисляется осевой момент инерции относительно оси z для однородного стержня массы М= γL (γ *кг/м* - погонная плотность , L- длина стержня).

Выражения моментов инерции тел правильной формы относительно некоторых осей можно найти в справочниках.

*моменты инерции 2.tif*

3

*Центробежные моменты инерции*.

В отличие от осевых моментов инерции, центробежные моменты инерции

могут быть отрицательными или равными нулю.

Ось называется ***главной осью инерции в точке О***, если оба центробежные момента с ее индексом равны нулю. Так ось z будет главной в О, если

(31)

Можно показать, что для любого данного тела в любой точке пространства существует три взаимно перпендикулярных главных оси инерции XYZ, в которых матрица инерции будет диагональной.

Активируйте анимацию, чтобы посмотреть, как меняется направление главных осей инерции при изменении положения точек системы



***Следствия***

1. Внутренние силы не изменяют кинетического момента непосредственно. Однако, как и в теореме о движении цента масс, они могут вызвать внешние силы, изменяющие кинетический момент.
2. Если **MeO**=0, то **KO=Const** векторно. Так для Солнечной системы, которую можно считать изолированной от внешнего влияния удаленных галактик, вектор кинетического момента сохраняет свое направление и модуль. Перпендикулярная ему плоскость, называемая ***плоскостью Лапласа***, тоже сохраняет свое положение по отношению к гелиоцентрической инерциальной системе отсчета.



1. Если, в частном случае только Мz=0, то сохраняется соответствующая проекция кинетического момента Кz=Сonst. Так кинетический момент конического маятника относительно вертикальной оси не будет изменяться с течением времени, поскольку Мz=0. Значит, во время движения произведение mV h будет постоянным, т.е.

