**Лекция 14**

**Колебания системы с двумя степенями свободы.**

**Квадратичная форма потенциальной энергии.**

**Условие устойчивости положения равновесия.**

Рассматриваем систему с 2-мя степенями свободы и обобщенными координатами q1, q2. Все силы потенциальны, значит существует функция Пусть система имеет положение равновесия, в котором выбираем начало координат и нулевой уровень потенциальной энергии

Разложим в ряд Маклорена в нуле:

Ввиду выбора нулевого уровня П и условий равновесия (1) первым ненулевым слагаемым окажется квадратичная форма

Здесь обозначены коэффициенты жесткости системы:

Система называется ***линейной по П***, если члены разложения, следующие за квадратичной формой, отсутствуют. Если система не линейна, то ее «линеаризуют», рассматривая малые движения системы около положения равновесия. После линеаризации потенциальная энергия практически является квадратичной формой.

Коэффициенты жесткости образуют симметричную матрицу жесткости:

при этом с12 = с21, т.к. порядок взятия смешанной производной не имеет значения.

Пусть положение равновесия устойчиво. Значит, выполняются критерии Сильвестра:

**Квадратичная форма кинетической энергии.**

В формуле

скорости точек являются функциями обобщенных координат и скоростей

Подставив в (7), получим

Таким образом, кинетическая энергия Т является квадратичной формой обобщенных скоростей

с коэффициентами, в общем случае, зависящими от обобщенных координат:

Система называется ***линейной по Т***, если функции постоянны. Если система не линейна, то ее линеаризуют, рассматривая малые движения системы. Функции раскладывают в ряд Маклорена и оставляют только первый член разложения

Это значит, что получить квадратичную форму Т можно, вычислив кинетическую энергию системы в момент прохождения системой положения равновесия (в нуле).

Поскольку кинетическая энергия всегда положительна, то для ее коэффициентов всегда выполняется критерий Сильвестра:

**Дифференциальные уравнения движения системы.**

**Главные колебания.**

Подставив в уравнения Лагранжа системы

квадратичные формы Т и П, получим ***дифференциальные уравнения свободных колебаний системы с 2мя степенями свободы***:

Решение уравнений (14) ищем в виде периодических синфазных функций с разными амплитудами А и В:

Подставив (15) в дифференциальные уравнения (14), после сокращения на , получим однородные алгебраические уравнения относительно амплитуд А и В, с неизвестным параметром k – собственной частотой.

Как известно, нетривиальное (ненулевое) решение уравнений (16) существует, если определитель матрицы системы равен нулю:

Это биквадратное ***частотное уравнение*** относительно собственной частоты k имеет два корня. Нас устраивают только положительные вещественные решения, иначе решения (15) не будут периодическими.

Рис.1

Покажем, что при выполнении условия устойчивости (6), корни положительны и вещественны.

Построим график Запишем левую часть уравнения (17) в двух формах:

и в развернутой форме

Во-первых, ввиду того, что

из (19) вытекает, что

В то же время, из (18) вытекает, что при ***парциальных частотах***

Рис.1

функция у отрицательна

Таким образом, если положение равновесия устойчиво, то частотное уравнение (17) имеет два вещественных положительных корня и . Частоты и называются ***собственными частотами системы.***

Для собственных частот и уравнения амплитуд (16) становятся зависимыми. Найти же обе амплитуды А и В из одного независимого уравнения невозможно. Из него можно найти только отношения амплитуд А и В – коэффициенты формы

Для каждой собственной частоты из , например, первого уравнения

находим

Теперь закон движения системы приобретает вид:

Видим, что система совершает 2 ***главных колебания*** с частотами *k1* и *k2*. В решении есть четыре произвольных постоянных

; ;

которые следует найти из начальных условий

***Замечание о нормальных координатах***:

Можно показать, что для любой системы существуют обобщенные координаты, называемые ***нормальными***, в которых отсутствуют коэффициенты квадратичных форм

В нормальных координатах уравнения «разделяются»:

Это значит, что главные колебания в нормальных координатах независимы.

***Пример*** ***(колебания двойного математического маятника)***:

Рассмотрим движение двойного математического маятника (Рис.2). Для простоты, положим, что их массы *m* и длины *l* одинаковы. Уравнения Лагранжа в обобщенных координатах и :

Квадратичную форму кинетической энергии найдем, вычислив Т в момент прохождения системой положения равновесия. В нижнем положении скорость нижней массы равна

*l*

*l*

mg

mg

Рис.2

Система линейна по Т , поскольку коэффициенты инертности постоянны:

Потенциальная энергия системы равна работе сил тяжести при возвращении маятника в положение равновесия:

Система не линейна по П, поскольку и являются рядами. Рассматриваем малые движения маятника около положения равновесия. Тогда можно считать, что

и

Отсюда

Частотное уравнение:

Сократив на получим

Решения уравнения (41) дают две собственные частоты

Находим коэффициенты формы. Для

Для частоты получим

Положительный коэффициент формы означает, что по первой главной форме маятники будут колебаться синфазно (Рис.3 а). Отрицательный коэффициент формы означает, что по второй главной форме маятники будут колебаться в противофазе (Рис.3 б).

Рис.3

а

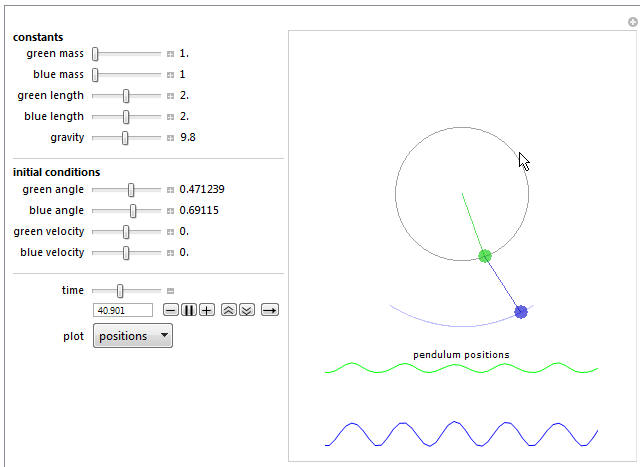
б

Характерно, что бóльшая частота соответствует отрицательному коэффициенту формы.

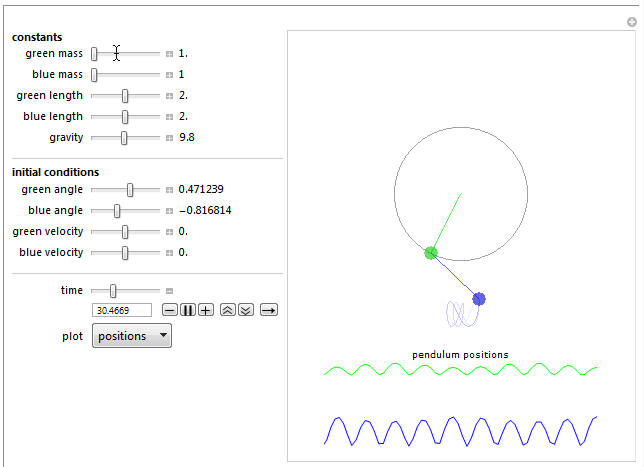
Система будет колебаться только по одной из форм, если маятники отклонить в пропорции или как на Рис.3 (а или б) и отпустить без начальной скорости. При произвольных начальных условиях одновременно будут совершаться обе формы колебаний.

Представление о движении маятника при различных значениях параметров дает анимация





Форма 1



Форма 2