***Лекция 9***

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ**

**Линейные колебания системы с одной степенью свободы**

**Устойчивость положения равновесия системы.**

Все вокруг нас, даже с виду находящееся в покое, совершает периодическое движение, называемое колебаниями. Характерным условием возникновения колебаний является наличие устойчивого положения (состояния или процесса) равновесия, около которого совершаются колебания. Как определить существует ли такое положение?

**Определение положения равновесия системы.**

Рассматривается консервативная система с идеальными голономными стационарными связями, с одной степенью свободы (*l* = 1) и потенциалом

Найти положения равновесия системы, если они существуют, можно из принципа возможных скоростей в обобщенных координатах:

который гласит, что в положении равновесия потенциальная энергия имеет экстремум.

Выражение (1) является уравнением относительно координаты q. Корни уравнения, если они имеются, являются координатами положения равновесия системы.

**Пример**: ***Обращенный математический маятник*** (Рис.1).

Так называется математический маятник длины *l* и массы m со спиральной пружиной жесткости c’, деформация которой равна нулю в вертикальном положении маятника.

Рис.1

с’

φ

Выберем начало обобщенной координаты φ в вертикальном положении, которое примем за нулевой уровень потенциальной энергии:

Функцию вычислим как работу силы тяжести и упругого момента пружины при возвращении маятника из отклоненного положения в положение равновесия.

Статический принцип возможных перемещений дает уравнение:

Решения этого уравнения находятся в точках пересечения(Рис.2) прямой и синусоиды

Если пружина достаточно жесткая

φ1=0

φ2

φ3

φ4

φ

у

Рис.2

то графики не пересекаются, и маятник имеет только одно - верхнее вертикальное положение равновесия.

При этом

То есть в положении имеет минимум.

При жесткости пружины

потенциальная энергия П будет иметь в нуле максимум, и появятся несколько положений равновесия. Чем меньше жесткость пружины , тем больше положений равновесия будет иметь система. График показывает, что при данной жесткости пружины система имеет 4 положения равновесия.

Поскольку является функцией одной переменной, то ее максимумы и минимумы чередуются. При этом в верхнем положении будет максимум.

При отсутствии пружины положений равновесия бесчисленное множество

но физически это будут два вертикальных положения.

Различают три типа положения равновесия: устойчивое, неустойчивое, безразличное. Для шарика это положения 1, 2 и 3 (Рис.3). При отклонении из устойчивого положения равновесия шарик в него возвращается. При отклонении из неустойчивого положения равновесия шарик туда не возвращается. Положения безразличного равновесия составляют континуум - рядом с любым из них существует такое же.

1

2

3

Рис.3

Опыт показывает, что колебания возникают только около устойчивого положения равновесия.

**Устойчивость положения равновесия по Ляпунову.**

Рассмотрим систему с одной степенью свободы и положением равновесия, в котором выберем начало обобщенной координаты . ***Состояние системы*** определим значениями ее координаты и скорости (t). Эти параметры примем за координаты ***фазовой плоскости*** *q,* . Начало фазовых координат соответствует покою системы в положении равновесия (Рис.4). Состояние системы характеризуется положением изображающей точки на фазовой плоскости.

q

q\*

δ

δ’

- ε’

ε

- δ’

- δ

ε’

-ε

Рис.4

В момент дадим системе ***возмущение***, дав системе начальную координату и скорость . Изображающая точка начинает движение из положения . Далее система будет совершать ***возмущенное движение*** , а изображающая точка опишет ***фазовую траекторию***.

Положение равновесия называется ***устойчивым по Ляпунову***, если по любым двум сколь угодно малым числам ε, ε’ можно задать такие два других сколь угодно малых числа δ, δ’, что фазовая траектория с началом в области δ никогда не выйдет из области ε.

**Линейные и нелинейные системы.**

**Линеаризация.**

***Потенциальная энергия системы***

Рассмотрим консервативную систему с потенциальной энергией и положением равновесия, в котором выберем начало координаты q и нулевой уровень потенциальной энергии:

– условие равновесия (10)

Разложим в ряд Маклорена, учтя условие равновесия:

Первое ненулевое слагаемое в ряду называется ***квадратичной формой***, поскольку содержит квадрат q.

Система называется ***линейной по П***, если П является квадратичной формой q, т.е. все остальные члены разложения равны нулю.

***Кинетическая энергия системы***.

где

Видим, что кинетическая энергия является квадратичной формой обобщенной скорости

с коэффициентом

Функцию разложим в ряд Маклорена.

Система называется ***линейной по Т***, если Т является квадратичной формой с постоянным коэффициентом, т.е. если

Система ***линейна***, если она линейна и по Т и по П.

Если система не линейна, то приходится её линеаризировать. ***Линеаризацией*** системы называется введение ограничений, позволяющих считать систему почти линейной. Если рассмотреть малые движения системы q,<<1, то в разложении функции останется только первый член

Где с – ***жесткость системы***

После линеаризации в разложении остается только первое слагаемое

***Следствие***:

Чтобы получить квадратичную форму Т,

нужно вычислить Т в момент прохождения системой положения равновесия.

**Примеры:**

а) масса m на линейной пружине (Л8, Рис.3):

Система линейна и по Т и по П:

б) Обращенный маятник:

(22)

Система не линейна по П, и линейна по Т.

**Теорема Лагранжа – Дирихле об устойчивости.**

**Критерий Сильвестра (достаточное условие устойчивости).**

***Теорема (без доказательства)***: для того чтобы положение равновесия системы было устойчивым по Ляпунову достаточно (но не необходимо), чтобы функция П имела в этом положении минимум.

Это значит, что, если в данном положении равновесия П имеет минимум, то оно устойчиво. Если нет, то требуется более тонкое исследование.

Выберем начало координат и нулевой уровень потенциальной энергии в положении равновесия. После линеаризации (если требуется), получим:

Для системы с ***одной степенью свободы***

– условие минимума П и устойчивости положения равновесия

Для системы с ***l*** степеней свободы:

поскольку

по выбору нулевого уровня П и условию равновесия.

***Коэффициенты жесткости*** системы

образуют матрицу жесткости

Согласно теореме Лагранжа – Дирихле для устойчивости положения равновесия необходимо чтобы функция П в начале координат имела минимум. Поскольку П в нуле равна нулю, то для устойчивости нужно, чтобы функция П была положительно определенной в окрестности нуля. Из математики известно, что условием положительной определенности квадратичной формы, а, значит, и

***достаточным условием устойчивости положения равновесия в нуле является критерий Сильвестра***:  ***положительность всех главных диагональных миноров матрицы жёсткости.***

1= c11 > 0

….......

Если критерий выполняется, то данное положение равновесия является устойчивым по Ляпунову. Если критерий не выполняется, то требуются более тонкие методы исследования устойчивости.