Л.1

#### ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

**Общие теоремы динамики системы**

#### 

##### Мат.система. Центр масс и центр тяжести.

##### Классификация сил. Дифф.ур. движения движ системы

Система (Солн-самолеты)-М-С-

Тв.тело

Однородное тело M= γV и

Центр тяжестиd**P= g (r)**dm= **g (r)** γdV **P=****g (r)= -**g(z)**k**

d**P= -**γg(z)dV **k=**-dP **k**

Поле однородно, **g=Const P=**M**g** телебашня

Классификация сил-Свойства внутр.сил-Неуравновеш.

Дифф.ур (вект-скал)- Сложность (много-внутр.сил)

Движение «в целом». Три общие теоремы динамики

**Теорема об изм. Q (Теорема о движении ЦМ)**

###### Кол.дв. точки и системы

Точка-Сист- Q=MVc -Проекции

Поступат. Часть- Колесо

***Теорема о Q (Теорема о дв. С)***

Точка-Н2-Сумма-Теорема-Проекции

Q=MVc - Т.о движ. С

Следствия (снаряд-авто-пара-пушка)

Инерцоиды-Семена

Л.2

Теорема об изменении кинетического момента

Кинетический момент точки и системы относительно центра и оси

Точка-Проекции матрично *K*o=m*Rv* - Вычисление- KZ= +qh

Система- **KA= KВ+ АВ×** M**vc**

Кинетический момент системы в сложном движении

С-координаты- rj=rc+rj- **Ko=Kcr+r**c **×** M**vc**

**Теорема об изм.Ко и КСr**

Теорема- **dKo**/dt=**Moe** - Проекции-

**Ko=Kcr+r**cxM**vc** - Moe= Mce+rcxVe-- Проекции-

Только С

Следствия (Пл. Лапласа- Конич. маятник)

**ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА**

**Кинетический момент тела в сферическом движении**

**Матрица инерции**

*KО=(−∫ R2dm) ω**JО*=−∫ *R*2dm (t)

Jx=∫ (y2+z2)dm>0 Jxy=Jyx =∫xydm <>0 JL=∫ hL2dm

Cтержень Jz>Jz’ - Вычисление

Центробежные мом. ин. Главная ось инерции Свойства симметрии

Л.3

**Преобразование матрицы инерции при параллельном переносе системы координат из центра инерции. Формула Штейнера**

Сферическое движение

**KО=KС+ rC** x M**vc** *vC =  RC* Случай Vc=0

*KO=(JC −MRC2) ω= JO ω JO= JC*−M*RC*2

Ф-ла Штейнера Jz=JzC+M(xC2+yC2)= Jz’+Md2

**Кинетический момент вращающегося тела.**

Не центр и не гл - Вращательное движение**- KА= KО+ АО×**M**vC** ≠ **KО**

Не центр, но гл (**Kо** по z, но **KА** ≠ **KО** ) – Гл и центр **KА= KО = KС**

Вывод ***главная центральная ось является главной в любой своей точке***.

**Общие уравнения движения твердого тела. Дин. эквив-сть систем сил.**

6 неизвестных (закон + реакции)- Своб- Плоск-Вращат

## Теоремы- В неподвижных

## в подвижных *JС*=Сonst и *KС(t)=JС ω(t)*

## d**KС** /dt= dr**KС** /dt+**×** **KС**

Матрично: d*K***С** /dt=*JC * *JСω*

### Уравнения *MwC=Va+VR*

*JСε + Ω JС ω =MaС+ MRС*

Случай вращательного и сферического движений С переходит в О

Динамическая эквивалентность

**Общие уравнения поступательного движения**

**Общие уравнения вращательного движения-**

ωx=ωy=0, ωz=\*, z= z\*= \*\*, *wC=(E+)r*

−MxCω2 −MyCεz=ΣFkx+XA+XB

MxCεz −MyCω2 = ΣFky+YA+YB

0 =ΣFkz+ZA

J yzωz2− Jxzεz =Σmx(Fk)−YBh

-Jxzω2−Jyzεz =Σmy(Fk)+XBh

Jzεz =Σmz(Fk)

Условия равнопеременного и равномерного вращения

Л4

**Уравновешенность вращающегося тела**

−MxCω2 −MyCεz=0 △=ω4+ε2≠0

MxCεz −MyCω2=0

J yzωz2− Jxzεz=0 △=ω4+ε2≠0

−Jyzεz −Jxzω2 =0

Статическая и динамическая

xC=yC=0 (27)

Jzx=Jyz=0

**Общие уравнения плоского движения**

MxC\*\*=ΣFkx MyC\*\*=ΣFky  0=ΣFkя+Z

J yzωz2− Jxzεz =Σmx(Fk)+Mx -Jxzω2−Jyzεz =Σmy(Fk)+My Jz\*\*=Σmz(Fk)

**Сопротивление движению колеса**

Твердые колесо и дорога

***Момент сопротивления качению мягкого колеса по твердой дороге (традиционная модель)***

Внутреннее трение - Ведущее - Смещение N- вращаться только при fr > k

k- Момент сопротивления качению колеса- Малое трение -Нет буксования

***Сила сопротивления движению твердого колеса по мягкой дороге*.**

Нормальные реакции - Сила сопротивления дороги- ведомое- Малое трение-Буксование - Сани

Общий случай

Пародоксы традиционнго изложения

**Теорема об изменении кинетической энергии**

Кинет.энергия точки, системы. Т.Кенига

Инерц.сист- Точка-Преобразов мех. движ в другие- Сравнение с Q- Система- Положительность

С-коорд- Составн. движ- Кениг

Л5

Кинет. энергия тв. тела

Своб-.Кениг-Tr- vr**2=***vrTvr=(R)T (R)=TRT (R)=T( R)R=T(R2)*

- Поступат- Сферич.(T=.5ωTJω- T=.5JLω2)- Вращ- Плоск (2е ф-лы)-

Пример (колесо)

Теорема об изм. кин. эн. точки. Элементарная раб., мощность

Точка- Ньютон- dr- d’A- Размерность (нм=дж, кгм-техн сист. ) Вычисление- Знак- Касательная

Мощность- Колесо (Сила трения- Момент плюс сил тр)- Трогание с места автомобиля

**Элементарная работа силы, прилож. к телу в прост. движ.**

Система- Внутр. силы (через мощность) - Тело- Неизм. сист.

Поступат- Вращ- Плоское (Сопр. качению)-

Конечная работа

Участок- Разбиение- Ломаная- Предел-Кр.инт.2 рода- Касат

Типы сил: Общ- Сопр(Закон)- Поле (Траект)-

Пот.поле (Пост- Тяж- Упр)

Т-ма об изменении Т системы

Точка системы- Сумма- Дифф. форма-

Интегр. форма- Неизмен. сист.

Л 6

**Начала аналитической механики**

Классификация связей

Несвоб.сист- 3n коорд.- Связи- Уравнен. связи

Классифик.: Геом-Кинемат (маятн-колесо), Стац-Нестац

Удерж-Неудерж, Гол-Негол

**Общее уравнение динамики**

**несвободной системы с идеальными связями**

**Возможная, действительная и виртуальная скорость точки.**

**Возможная и виртуальная мощность силы.**

**Методы Ньютона и Лагранжа**

Т. на нестац. поверх- Ньютон – возможные и виртуальные скорости и мощности – Методы Ньютона и Лагранжа.

Cтац.связи (совпадение) Система

**Идеальные связи.**

**Общее уравнение динамики.**

Статический принцип возможных мощностей.

Даем Vkr - Идеальные связи: Опред- примеры- Внутр.силы тела

Ньютон- Метод кинетостатики - Общее ур – Пример -Что дает (связи) -

Принцип (необх и дост)

**Л 7**

#### Ур. Лагранжа

**Обобщенные координаты. Число степ. своб.**

1

2

3

Система- 3n коорд- Гол. связи- Независимые координ.-

Число степ. своб. гол. сист.-

Обобщенные коорд.- 3 тела

**Обобщенные силы. Способы вычисления.**

. - - Идеальные связи

Cпособы вычисления (Формула в проекц- Через δA- П позже)

**Стат. принцип возм. скоростей. в обобщ коорд.**

Qi=0-

Тождества Лагранжа

rk(q,t)- vk- drk/dqi(q,t)-

1) dvk/dqi=drk/dqi

2) dvk/dqj=d/dt drk/dqj

Уравнения Лагранжа

Общ.ур. в обобщ. коорд.

Ид,гол,уд. связи- Общ.ур (идеальность)-

Σ( )dqi=0 - Голономность- Уравнения

Алгоритм- Преимущества- Недостатки(формал-реакции)

Пример: Эллиптический маятник

**Л 8**

Потенциальное силовое поле

**Определение и свойства потенциального силового поля.**

Сил. поле- Стационарное - Аналитически

Опред. П- Критерий

Свойства (d’A=dП, A12=П1-П2, Ao=0)

Система работы пот сил. ∑П

**Эквипотенциальные поверхности**

**Примеры вычисление потенциальной энергии.**

**Закон сохранения полной механической энергии.**

Аддитивная пост- Эквипот пов – Направл F- Нул уровень- Правило

Примеры (Пост сила- Сила тяж- Упр.сила для пружины с одним закрепленным концом )- Вычисление dП-П и по правилу.

Консерв.сист- Примеры (d’A=-dП, П, А12) (Пост-Тяжесть-пружины)- Сохранение Е- Непотенц.силы- dE/dt=Nнепот Пример (F=-aV)

**Обобщенные силы консервативной системы.**

**Статический принцип возможных скоростей консервативной системы**:

- Эллипт маятник

***Статический принцип возможных скоростей консервативной системы****:*

Ур.Лагранжа для консерв. систем.

Цикл. координаты и интегралы

П- Ф-я Лагр- Ур-ния-

Цикл. коорд и интегралы- Смысл

Эллиптический маятник

**Л 9**

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КОЛЕБАНИЙ

Линейные колебания системы с одной степенью свободы

Устойчивость положения равновесия системы

Колебания- Положение уст равновесия

**Определение положения равновесия сист.**

Сист. с ид.,гол, стац связями- Qi=0- П’=0-

Пример (обр.маятник- различие положений-МаксМин П)-

Три типа полож равн (шарик).

# **Устойчивость пол равн по Ляпунову**

# Состояние-Фазовая плоскость и траектория- Возмущение – Возмущенное движение - Определение

Линейные и нелинейные системы.

Линеаризация.

Ид,гол,стац - Консерв-

**П(q)-** Пол. равн q=0- По=0- Маклорен – Лин по П - Квадр.форма П=1/2сq2- Линеаризация q<<1

**Т=1/2a(q)q’2** – Лин по Т (а= Const) - Маятник (лин по Т)

Лин (П и Т- кв.формы с пост.коэф)-

Маклорен -a(0)- Вычисление Т в нуле

Пружина (Лин)- Маятник (Нелин) -

Т-ма Лагр.-Дирихле об устойчивости

**Критер. Сильвестра (достаточное условие устойчивости).**

Теорема (Достаточное условие)-

1 ст.св (П”=с>0)-

L ст.своб- Ряд Маклорена- По=П’о=0

Квадратичная форма- Матрица жесткости

Положит опред. в нуле- Крит. Сильвестра - 1ст.св -Достаточность

**Л10**

Свободные колебания сист с 1ой ст.св. без сопротивления

Лагранж- Дифф.ур- Реш- Устойчивость- \a, A- T

**Диссипативная ф-я Релея сил вязкого сопротиления**

**Ее связь с полной мех. энергией сист.**

Вязк.сопр- Q- Тожд.Лагр-

Ф.Релея- Кв.форма- b(0)

Лагр (x) q’- Связь с Е

**Влияние вязкого сопр. на движ.сист.**

Консерв.сист (изолир)- Обмен со средой- Отток (сопр)-

П,Т,Ф- Лагр- Дифф.ур- n<k- A,a- График- Декремент

n>k- C1,C2- q(t)- [qo’]<[qo](n+Vn2-k2)

n=k

## Пример

**Л11**

Вынужденные колебания без сопротивления. Закон движения.

Обмен со средой- Приток (Вынужд.сила)- Грузик на пруж- В стакане- Раскидай

П, Т- Периодическая Q(t)- Ряд Фурье Q(t)=∑HiSin(pit+ δ i)

Лагр- Дифф.ур- q=q1+q2

p=/k- q2=h/k2-p2Sin(pt+ δ)- C1 C2- Три колебания

Биения и резонанс при отсутствии сопротивления

p->k (qo qo\*=0)-

q=h/ k2-p2 [Sin(pt+δ)-Sin(kt+ δ)=2h/k2-p2Sin(p-k)t/2 Cos(pt+ δ)

Sinα-Sinβ=2Sin[(α-β)/2] Cos[(α+β)/2]

Самолет

p=k –

q=BtCos(pt+ δ) - B=-h/2p

- λ(z)- Сдвиг фаз ε- Раскидай

**Л12**

**Вынужденные колеб при вязком сопротив. Закон движения.**

Силы- П,Т,Ф- Q- q=qoo+qч-

qч=ASin(pt+δ-ε)- A-Tg ε -

C1 C2-Три движения-

Затухание qoo

**Зависимость λ(z) и ε(z)**

Безразмерные характеристики- Аст=H/c=h/k2- λ=A/Acт- Экстремумы: λ(0)=1, λ(oo)->0

y=(1-z2)2+4n2z2 –

y’=-4z(1-z2)+8n2z=4z[(2n2-1)+z2] 0 -

z1=0, z2=- z2 существует пока n2 < n 2\*= 1/2

Исследуем 0 на вид экстремума

y”(0)=4[(2n2-1)+z2]+4z[ ]’=4(2n2-1)>0 если n>n\*

**ε** (z)- Выводы

Затухание qoo

Колебания системы с 2мя степенями свободы

Квадратичные формы П и Т

Система,- Пот.энергия- Пол.равновесия. – Начало и нул.уровень- Разложение- Линеаризация- Критерий Сильвестра

Квадратичная форма Т

Форма- Линеаризация- Вычисление в 0- Кр Сильвестра

**Пример: Колебания двойного математического маятника**

a11=2ml2 a12=a22=ml2 c11=2mgl c22=mgl c12=0

**Л 13**

**Дифф ур движения**

**Решение**

A Sin(кt+α), B Sin(кt+α)

Ур-ния отн А и В- Однородные

Определитель=0 (нетривиальное решение) – Биквадратное уравнение

Δ2= (с11-k2a11)( с22-k2a22)-(с12-k2a12)2 = (a)

=(a11 a22-a122)k4- (c11a22+c22a11-2c12a12)k2 + c11c22-c122 (б)

График Δ2 (к),

Δ (0) > 0 (б) Δ (оо) > 0 (б) Δ (к1\*2), Δ (к2\*2) < 0 (a)

к1\*2=с11/а11 к2\*2= с22/а22

Для к1 и к2 алгебр ур-ния зависимы

Коэфф формы μi= -(с11-ki2a11)/( с12-ki2a12)

2 гл колебания

А1 α1 А2 α2 из нач условий

Понятия о нормальных координатах (а12=с12=0)

**Пример: Колебания двойного математического маятника**

k1= g (2+√2) /l μ1= - √2

k2= g (2- √2) /l μ2= √2

Формы- Нач усл

**Лекция 14**

**Вынужденные колебания без сопротивления**

**системы с двумя степенями свободы**

Диф уры- Решение складывается

Нормальные координаты θ- 2 резонанса

***Пример*** (динамический гаситель колебаний).

Машина M- H Sin(t+- гаситель m

Отсюда

Отсюда

**Л 16**

**ГЕОМЕТРИЯ МАСС.**

**Матрица инерции. Осевые и центробежные моменты инерции**

*JC=*−∫ *R2*dm

Jx=∫ (y2+z2)dm>0 Jxy=Jyx =∫xydm <>0 JL=∫ hL2dm

Cтержень Jz>Jz’ - Вычисление

Центробежные мом. ин.. Главная ось инерции

**Кинетический момент тела в сферическом и вращательном движениях. ?**

*KO=(JC −MRC2) ω= JO ω JO= JC*−M*RC*2

Сферическое движение*-* Главные оси

Вращательное движение**-** Главные оси

Центральная ось. Главная центральная ось.

**Преобразов. матр. инерц. при переносе системы координат из ц. инерции**

*JO = JC MRC2*

Ф-ла Штейнера - Jxy=JxCyC-MxCyC

**Преобразование матрицы инерции при повороте системы координат. ?**

*J’=PJ PT= ТТ J Т Р=* α23= Cos (y’z) α32=Cos(z’y) ≠α23

*J’=*=

=

Jx’=Jxα112+Jyα122+Jzα132−2Jxy α11 α12−2Jyz α12 α13−2Jzxα13α11

Осевой момент инерции относительно произвольной оси L,

JL=Jxα12+Jyα22+Jzα32−2Jxy α1 α2−2Jyz α2 α3−2Jzxα3α1

Центробежный момент инерции

Jx’y’=Jxα11α21+Jyα12α22+Jzα13α23-

-Jxy(α12α21+α11α22)−Jyz(α13α22 +α12α23)−Jzx (α13α21+α11α23)

**Эллипсоид инерции. Главные оси инерции в точке.**

ОМ=1/ x=OMα1 α1= x /OM=x

Jxx2+Jyy2+Jzz2−2Jxy xy−2Jyz yz−2Jzxzx=1

X2/a2+Y2/b2+Z2/c2 =1 a2=1/Jx

Выводы (3 главных направления в точке- Экстремальные моменты)

**Определение главных осей по свойствам симметрии тела**

*Ось мат симметрии- Плоскость мат симметрии*

**Свойства главных осей инерции**

Перенос (Гл центр ось)

Поворот