***Лекция 6***

**НАЧАЛА АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ ЛАГРАНЖА.**

**Общее уравнение динамики**

**несвободной системы с идеальными связями**

**Классификация связей.**

Рассмотрим движение системы n точек {в инерциальной системе отсчета с координатами x, y, z. Положение системы определяется 3n координатами {x1y1z1… xiyizi …xnynzn} . Несвободной называют систему, координаты и скорости точек которой ограничены ***связями***. В общем случае уравнения s связей имеют вид:

Ф𝛼 (x1…zn; 1…n; t) ≥ 0 (𝛼 = 1, 2,…,s) (1)

Связи подразделяют на:

1. ***Геометрические и кинематические***

В уравнения геометрических связей не входят скорости. Рассмотрим 2 примера: маятник A переменной длины и колесо B, которое катится без проскальзывания.

Траектория

z

**Vн**

**V**

*l* (t)

y

x

A

**V**

ω φ

x

C

В

r

Рис.1

Расстояние от маятника А до начала координат не может быть больше переменной длины нити, поэтому уравнение связи имеет вид:

x2+y2+z2 ≤ *l* 2 (t) (2)

Связь геометрическая, поскольку в ее уравнении нет производных от координат.

При качении колеса В без скольжения скорость центра и угловая скорость связаны соотношением

(3)

Связь кинематическая.

1. ***Стационарные и нестационарные***  
   В уравнения стационарных связей время t не входит явно

*Примеры*: А – нестационарная, т.к. время входит в уравнение  
 В – стационарная

1. ***Удерживающие (двусторонние) и неудерживающие (односторонние***)  
   Уравнения удерживающих связей пишутся через равенство, неудерживающие- через неравенство.  
   *Примеры*:

А – неудерживающая связь. Название односторонняя следует из того, что нить не

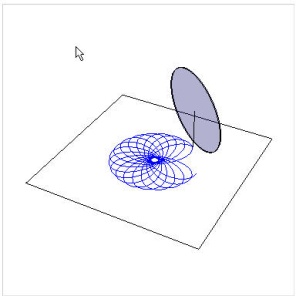
растягивается, но может сминаться. Таким образом, нить действует в одну сторону, от центра.

В – удерживающие

1. ***Голономные и неголономные***:  
   ***Голономные***  связи это все геометрические связи, а также те из кинематических, которые интегрированием могут быть приведены к виду геометрических.

*Примеры*: и А и В – голономные связи. Уравнение связи А – геометрические, а уравнение связи колеса В может быть проинтегрировано и приведено к виду геометрической связи

x – r φ = 0 (4)

Примером неголономной связи является шероховатая плоскость для катящегося по ней без проскальзывания диска. Движение диска можно проследить на анимации:



Изучение систем с неголономными связями является сложной проблемой аналитической механики и выходит за рамки курса. Мы будем рассматривать только системы с голономными связями, которые будем называть ***голономными системами***.

**Общее уравнение динамики**

**несвободной системы с идеальными связями**

**Возможная, действительная и виртуальная скорость точки.**

**Возможная и виртуальная мощность силы.**

**Методы Ньютона и Лагранжа**

Рассмотрим простейший пример движения точки массы под действием силы и нестационарной геометрической связи

Уравнение связи можно трактовать как уравнение подвижной поверхности, по которой движется точка. На Рис. 2 изображена фотография поверхности в момент

времени t.

0

q1

**R**

q2

***r***

Рис.2

**F**

Траектория

Равнодействующая активных сил **F** и реакция связи , однозначно определяют ускорение точки согласно закону Ньютона

Уравнение (6) порождает множество  ***возможных*** положений искоростей точки, отвечающих множеству начальных условий. На Рис.2 точка изображена в одном из возможных положений.

П

Рассмотрим движение точки как составное движение. Возможную скорость точки представим суммой переносной скорости вместе с поверхностью связи и относительной скорости по поверхности связи (Рис.2):

Переносная скорость однозначно определена движением связи в данном положении точки на связи. Относительная скорость может принимать множество значений, соответствующих множеству начальных условий. Поэтому множество относительных скоростей называют ***виртуальными скоростями*** точки***.*** Относительные скорости имеют произвольный модуль, и все лежатв касательной к связи плоскости П.

На Рис.2 изображена переносная скорость, соответствующая положению точки на связи, и одна из виртуальных скоростей **,** отвечающаяконкретным начальным условиям. Их сумма называется ***действительной*** ***скоростью*** . Она касательна к действительной траектории точки, отвечающей конкретным начальным условиям.

Если связь стационарна, то связь неподвижна, и множества возможных и виртуальных скоростей совпадают.

***Возможной мощностью*** силы ***F*** назовем скалярную величину

***Виртуальной мощностью*** силы ***F*** назовем скалярную величину

Система материальных точек { в данный момент находится в одном из возможных положений {имеет возможные скорости {состоящие из переносных скоростей { и виртуальных скоростей {.

Вывод дифференциальных уравнений движения по связям представляет основной интерес при изучении движения системы.

Векторный метод ***Ньютона*** позволяет получить ***полную систему уравнений***, состоящую как из ***дифференциальных уравнений*** движения системы по связям, так и из ***уравнений для определения реакций*** связей. Недостатком метода можно считать векторный характер и «избыточность» уравнений. Ведь вычисления удобнее вести в скалярном виде, а главный интерес часто представляют только дифференциальные уравнения движения системы по связям.

Аналитический метод ***Лагранжа*** является скалярным и ограничивается получением только дифференциальных уравнений движения. Оноснован на трех идеях:

1. Рассматриваются только идеальные связи, реакции которых, не имеют мощности (например, перпендикулярны связям- Рис.2).
2. Уравнения Ньютона скалярно умножаются на векторы виртуальной скорости .

Такое умножение:

1. приводит к скалярной форме уравнений,
2. исключает идеальные реакции (

с) дает проекцию уравнений Ньютона, которая не зависит от виртуальных

скоростей .

Рис.3

q1

**R(**

q2

q1

Действительно, согласно закону Ньютона полное ускорение зависитот реакции , которая, в свою очередь, зависит от виртуальной скорости (вспомним реакцию моста на автомобиль)**.** Значит, зависит от **.** Но касательное **к связи** ускорение не зависит от ортогональной ему реакции **,**  а значит и от виртуальной скорости .

1. Движение рассматривается в независимых обобщенных координатах.

**Идеальные связи.**

**Общее уравнение динамики.**

**Статический принцип возможных мощностей.**

Рассмотрим голономную систему {. Обозначим через **Fk** и **Rk**равнодействующие активных сил и реакций связей, приложенных к точке mk.

Дадим всем точкам системы произвольные виртуальные скорости из данного возможного положения и вычислим виртуальную мощность сил. Связи называются ***идеальными***, если сумма виртуальных мощностей их реакций на любых виртуальных скоростях равна нулю

Примерами идеальных связей являются: шарнир без трения, нерастяжимая нить, гладкая поверхность. Далее будем рассматривать только идеальные связи.

Запишем основное уравнение динамики точки mk

(11)

в виде

(12)

Здесь

(13)

называется ***Даламберовой силой инерции*** .

Таким образом, при движении точки нагрузка, реакции и сила инерции находятся в «равновесии». Запись уравнений динамики в виде уравнений статики называется ***методом кинетостатики.*** Метод позволяет применить методы статики к решению динамических задач.

Умножим уравнения (12) скалярно на виртуальные скорости Суммирование по k с учетом идеальности связей приводит к ***общему уравнению динамики***

которое можно прочитать так:

*При движении системы с идеальными связями*

*сумма виртуальных мощностей активных сил и Даламберовых сил инерции равна нулю*.

По сравнению с методом Ньютона, преимущество уравнения состоит в исключении из рассмотрения реакций идеальных связей.

***Пример***. Два тела одинаковой массы m связанны нерастяжимой нитью. Одно из них скользит по гладкой поверхности. Таким образом, связи идеальны и принцип применим. Требуется найти ускорение W тел.

**W**

m**g**

m**g**

**I’**

**W**

V

**I**

V

Решая задачу методом Ньютона, мы должны разрезать нить, ввести в рассмотрение ее натяжение Т, составить два уравнения Ньютона и из них найти ускорение W и натяжение Т.

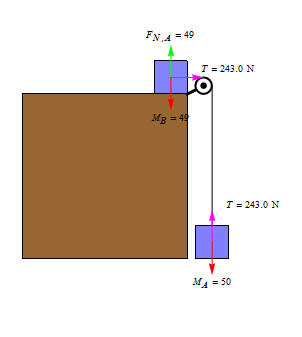
Общее уравнение динамики позволяет найти ускорение W из одного уравнения. Кроме физических сил тяжести m**g,**  изобразим Даламберовы силы инерции I = I’ = mW.

Связи стационарны, поэтому виртуальные скорости являются возможными скоростями. Возможная скорость правого тела может быть направлена как вверх, так и вниз. Дадим возможную скоростьвверх. Общее уравнение дает

(2 mW – mg) V = 0

откуда

W=g/2

 Проверить результат позволяет анимация



***Статический принцип возможных мощностей***.

Пусть в начальный момент система с идеальными ***стационарными*** связями находится в покое в некотором положении.

**Принцип**: *чтобы система осталась в покое в данном положении, необходимо и достаточно равенство нулю мощности активных сил на любых возможных скоростях системы в данном положении.*

**Замечание** - Предпочтительно говорить, что система находится в ***покое***, а силы находятся в ***равновесии***. Иногда, все - же говорят о равновесии системы, имея в виду ее покой.

***Необходимость*** принципа вытекает из общего уравнения . Действительно, если система остается в покое, то все ускорения и силы инерции равны нулю

и уравнение переходит в принцип.

***Достаточность***: Поскольку в начальный момент система находится в покое, то ее кинетическая энергия равна нулю:

Если выполнен принцип Na = 0, то по теореме об изменении кинетической энергии равна нулю и производная по времени от кинетической энергии

Кинетическая энергия остается равной нулю, и система остается в покое.