***Лекция 10***

**Свободные колебания с одной степенью свободы без сопротивления.**

Рассматривается движение консервативной системы с одной степенью свободы около устойчивого положения равновесия, где выбрано начало координаты q и нулевой уровень потенциальной энергии. После линеаризации (если система не линейна), кинетическая и потенциальная энергии системы приобретут вид квадратичных форм с постоянными коэффициентами.

Здесь ввиду положительности кинетической энергии, ввиду устойчивости положения равновесия.

Уравнение Лагранжа:

приводит к **дифференциальному уравнению свободных колебаний без сопротивления**

или

Попробуем найти решение уравнения в виде экспоненты. Подставив

в уравнение (3), после сокращения на , получим ***характеристическое уравнение*** для определения неизвестного параметра λ

Характеристическое уравнение имеет два мнимых корня

Значит, дифференциальное уравнение (3) имеет два независимых решения. Общее решение (второй интеграл) уравнения (3):

содержит две произвольные постоянные интегрирования С1 и С2 , которые могут быть найдены из начальных условий:

Чтобы использовать условия (8), находим закон скорости (первый интеграл уравнения)

Подставляя начальные условия, находим при

откуда

Получаем закон колебательного движения:

Убеждаемся, что при устойчивом положении равновесия

система совершает периодическое движение c ***круговой собственной частотой***

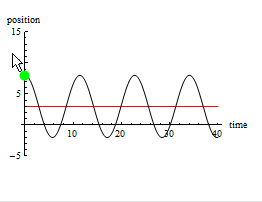
Закон движения (11) удобнее представить в виде одной функции синуса. Для этого перейдем к новым постоянным А и α так, чтобы получить в (11) синус суммы

Получим

Здесь А – амплитуда колебаний. Возведя (14) в квадрат и сложив, с учетом (10) получаем:

Аргумент синуса называется фазой колебаний, α- начальной фазой колебаний.

Поделив первое на второе выражение (14), найдем:



На Рис.1 представлен снимок с анимации

T

A

Рис.1



колебаний массы m = 1 кг , и введены обозначения: *k≡ c* , и начало координаты выбрано в неподвижной точке пружины длины 3. Чтобы запустить анимацию, откройте ее, и разверните движок времени.



и обнулите коэффициент сопротивления с.

Найдем период Т колебаний системы. Через Т сек фаза синуса изменится на 2π радиан

следовательно, период колебаний

**Диссипативная функция Релея сил вязкого сопротивления.**

**Её связь с полной механической энергией системы.**

Фактически, колебания системы всегда происходят в некоторой среде, которая сопротивляется движению. При движении с малыми скоростями возникают силы, которые можно считать пропорциональными первой степени скорости. Такое сопротивление называется ***вязким.***

Пусть к каждой точке системы приложена сила вязкого сопротивления:

Найдем обобщенную силу сопротивления, учтя тождество Лагранжа:

Здесь через Ф обозначена ***диссипативная функция Релея*** сил вязкого сопротивления:

Видим, что функция Ф совпадет с функцией кинетической энергии Т, если в последней массы точек заменить коэффициентами сопротивления.

Найдем обобщенную силу сопротивления Qсопр в обобщенных координатах. Скорости точек:

Функция Рэлея является квадратичной формой обобщенной скорости:

β' ρ



𝛽

Рис.2

Система ***линейна по Ф***, если коэффициент формы постоянен(аналогия с Т):

Если это не так, то систему линеаризуют, рассматривая малые движения, и ограничиваясь первым членом разложения функции в ряд Маклорена:

:

Это значит, что для получения квадратичной формы функции Релея с постоянным коэффициентом, Ф следует вычислять в момент прохождения системой положения равновесия (как и для кинетической Т). Это всегда упрощает вычисления.

Вязкое сопротивление практически осуществляется с помощью линейных и угловых демпферов (Рис.2). Функция Релея вычисляется по формуле:

Где коэффициенты сопротивления линейных демпферов (амортизаторов),скорости их поршней, коэффициенты сопротивления вращению, угловые скорости вращающихся тел.

***Связь функции Релея с полной механической энергией системы***

Рассмотрим нелинейную систему с одной степенью свободы и вязким сопротивлением. Как и раньше, система имеет положение устойчивого равновесия, где выбрано начало обобщенной координаты *q* и нулевой уровень потенциальной энергии.

Потенциальная и кинетическая энергия, функция Релея (без линеаризации):

имеют свойства

Умножим уравнение Лагранжа для этой системы

на

По формуле производной от произведения получаем

С учетом свойств (28) функций Т, П, Ф получаем

или

Этот результат можно сформулировать так:

***Полная механическая энергия системы убывает со скоростью* **

**Влияние сил вязкого сопротивления на движение системы.**

Дифференциальное уравнение системы с одной степенью свободы и вязким сопротивлением получим из уравнения Лагранжа

Квадратичные формы после линеаризации (если требуется)

После подстановки в уравнение Лагранжа получаем

Поделив (36) на а, и обозначив собственную частоту *k* и коэффициент сопротивления *n*

получаем ***дифференциальное уравнение колебаний с вязким сопротивлением***

Решение уравнения (38) ищем в виде:

Подставив в уравнение (38), после сокращения на, получим ***характеристическое уравнение***

Это уравнение имеет корни

которым соответствуют 2 независимых решения, сколько и должно быть у уравнения второго порядка.

Вид решений зависит от знака подкоренного выражения.

1. ***Случай малого сопротивления***

В этом случае корни комплексные

и решение уравнения (38) имеет вид

Это «второй интеграл» интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения

Первый интеграл, или обобщенная скорость

Как всегда, постоянные С1 С2 находятся из начальных условий:

откуда

Исследуем это решение, перейдя к новым постоянным интегрирования

Теперь

Где

Обозначим через

Рис.3

амплитуду, которая уменьшается с течением времени.

На Рис.3 представлен снимок с анимации

колебаний массы m = 1 кг , и введены обозначения: *k≡ c* , и начало координаты выбрано в неподвижной точке пружины длины 3.



Чтобы запустить анимацию, откройте ее, и разверните движок времени.



и установите коэффициент сопротивления с.

Колебания являются квазипериодическими, т.к. только положение равновесия система проходит

через равные промежутки времени . Квазипериод вычисляем как и для колебаний без сопротивления

Видим, что с увеличением сопротивления *n*, квазипериод увеличивается при

и становится бесконечным при

когда колебания вообще прекращаются.

Быстрота затуханий колебаний характеризуется отношением соседних размахов (максимальных отклонений от положения равновесия) и (Рис.3)

называемым **декрементом** (затуханием).Часто используют логарифмический декремент

Измерив два соседних размаха и время полупериода , можно вычислить коэффициент сопротивления n

***2. Случай большого сопротивления***

В этом случае корни характеристического уравнения – вещественные числа,

следовательно,

C1 и C2 находятся из начальных условий.

Видим, что движение не колебательное (апериодическое). Пусть начальное отклонение положительно. График движения может иметь один из трех видов.

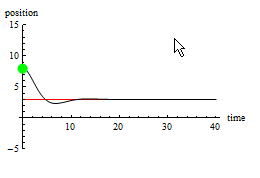
1. Система после отклонения асимптотически возвращается в положение равновесия.

Рис.4

1. Система сразу асимптотически возвращается в положение равновесия.
2. Система один раз пройдет через положение равновесия и асимптотически вернется в положение равновесия с другой стороны (Рис.4).

***3. Случай***

Маловероятное совпадение. Корни кратные, и апериодическое решение принимает вид.

Движения такие же, как и в случае

Зависимость свободных колебаний от всех параметров наглядно демонстрирует анимация

